

Uniwersytet Warszawski

Wydział Fizyki

Piotr Migdał

Nr albumu: 234522

Kody kwantowe odporne na dekoherencję i stratę fotonu

Praca magisterska

na kierunku FIZYKA

w zakresie FIZYKI TEORETYCZNEJ

w ramach MIĘDZYWYDZIAŁOWYCH INDYWIDUALNYCH STUDIÓW
MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Praca wykonana pod kierunkiem

dra hab. Konrada Banaszka

Instytut Fizyki Teoretycznej

Katedra Optyki Kwantowej i Fizyki Atomowej

Styczeń 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Niniejsza praca magisterska przedstawia analizę stanów odpornych na działanie kolektywnej dekoherencji, składających się z cząstek o spinie $1/2$. Omawiam ogólne właściwości takich stanów oraz analizuję geometrię podprzestrzeni singletowej. Pokazuję, że strata fotonu ze stanu z podprzestrzeni singletowej nigdy nie niszczy niesionej informacji kwantowej. Następnie zajmuję się cztero- i trójfotonowymi stanami odpornymi na kolektywną dekoherencję. Przedstawiam ich geometrię, sposoby wytwarzania oraz różne schematy pomiarów. Na końcu analizuję symulację działania kolektywnej dekoherencji w dwóch wariantach, obu zdatnych do zastosowania na stole laboratoryjnym.

Słowa kluczowe

komunikacja kwantowa, kolektywna dekoherencja, strata fotonu, podprzestrzeń singletowa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Klasyfikacja tematyczna

PACS:

42.50.Dv Quantum state engineering and measurements

42.50.Ex Optical implementations of quantum information processing and transfer

42.65.Lm Parametric down conversion and production of entangled photons

03.67.Pp Quantum error correction and other methods for protection against decoherence

Tytuł pracy w języku angielskim

Quantum codes immune to collective decoherence and photon loss

Spis treści

1. Wstęp	5
2. Podprzestrzenie nierozspójniane i podukłady bezszumowe (DFS i NS)	7
2.1. Rozkład Clebscha-Gordana	8
2.2. Klasyczna i kwantowa pojemność kanału	9
3. Geometria przestrzeni singletowej	11
3.1. Baza podprzestrzeni singletowej	11
3.2. Iloczyn skalarny w podprzestrzeni singletowej	13
3.3. Baza podprzestrzeni dubletowej	14
3.4. Dlaczego strata pojedynczego fotonu nie niszczy informacji	15
4. Czterofotonowy stan światła niosący qubit	17
4.1. Geometria	17
4.2. Strata jednego fotonu	19
4.3. Wytwarzanie	20
4.4. Pomiar	21
4.4.1. Pomiar stanu czterofotonowego	23
4.4.2. Pomiar stanu trójfotonowego	27
4.5. Zastosowania	28
5. Uśrednianie po $SU(2)^{\otimes n}$	31
5.1. Dyskretne	33

5.2. Ciągłe	33
6. Podsumowanie	35
A. Clebsch-Gordan i liczenie ścieżek	37

Rozdział 1

Wstęp

Kwantowe stany materii są cennym surowcem do obróbki i przesyłania informacji. Przynajmniej teoretycznie, umożliwiają rozwiązanie pewnych problemów algorytmicznych znacznie szybciej niż jakikolwiek komputer klasyczny. Inne zastosowania tyczą się kryptografii. Dzięki własnościom mechaniki kwantowej można szyfrować dane w taki sposób, że zasady fizyki nie pozwalają złamać szyfru (a nie tylko czynią złamanie niezwykle trudnym problemem).

Niemniej, możliwości inżynierii kwantowej mają swoją cenę. Po pierwsze, ciężko stworzyć bramki logiczne dla qubitów. Wzajemna interakcja dwóch cząstek jest albo bardzo podatna na zakłócenia (np. wypadku oddziaływania elektronów), albo skrajnie mało efektywna (np. dla oddziaływania fotonów). Po drugie, stany kwantowe są wrażliwe na interakcje ze środowiskiem. Strata cząstek, czy przypadkowy obrót polaryzacji, jest nieraz zabójcza dla niesionej informacji.

Informację kwantową można chronić na kilka różnych sposobów. Gdy amplituda szumu jest niewielka, można stosować redundancję przesyłanej informacji lub kody odporne na stratę jednej cząstki. Czasem zakłócenia wykazują pewną symetrię — np. są w postaci losowej operacji unitarnej działającej tak samo na każdą pojedynczą cząstkę. O ile niemożliwe staje się przesłanie informacji przy pomocy jednej cząstki, można zakodować informację w pewnym symetrycznym stanie kilku cząstek.

W praktyce do przesyłania informacji kwantowej na większe odległości nadają się wyłącznie fotony. Można jest przesyłać drogą powietrzną, przy czym taka komunikacja ma ograniczony zasięg i zarazem jest podatna na warunki atmosferyczne. Wygodniejsze jest przesyłanie informacji zakodowanej w polaryzacji fotonów przez światłowód. Należy się jednak liczyć z tym, że każdy światłowód wprowadza tłumienie (stratę fotonów) oraz losowy obrót polaryzacji. Z powodu deformacji mechanicznych i termicznych, w światłowodzie jest indukowana dwójłomność. Dodatkowo, sam zakrzywiony kształt światłowodu wprowadza obrót polaryzacji związany z fazą Berry’ego. Więcej na ten temat znajduje się w pracy przeglądowej [1]. Taka deformacja ma swoją charakterystyczną skalę czasu τ . Wiedząc o tym, możemy przesyłać kilka fotonów w odstępach czasowych znacznie mniejszych od τ .

Tym samym o ile obrót polaryzacji jest losowy, to jest on taki sam dla wszystkich fotonów. Korzystając z symetrii zjawiska, możemy poszukać takich stanów kwantowych (czystych lub mieszanych), które się niezmieniają ze względu na ten proces, zwany kolektywną dekoherencją (ang. Collective Decoherence). Przykładowo, dla dwóch fotonów stan singletowy i stan tripletowy nie mieszają się podczas kolektywnej dekoherencji.

Osią niniejszej pracy magisterskiej jest analiza podprzestrzeni nierozspójnianych (ang. Decoherence-Free Subspaces, DFS) oraz podukładów bezszumowych (ang. Noiseless Subsystems, NS), obu związanych z kolektywną dekoherencją. Szczególną uwagę skieruję na pewien czterofotonowy stan światła [2], w którym zakodowany jest jeden qubit logiczny. Wykażę, że zarówno wspólny obrót polaryzacji, jak i utrata pojedynczego fotonu, nie zaburzają przesyłanej informacji. Przedstawię schematy jego wytwarzania przez kombinację dwóch par ze spontanicznego parametrycznego podziału częstości. Zajmę się również sposobami jego mierzenia przez różne warianty osobnego mierzenia polaryzacji składowych fotonów. Część ogólnych informacji znajduje się w pracy przeglądowej [3].

Praca jest uporządkowana następująco. Rozdział 1. to wstęp, który masz przyjemność teraz czytać. W rozdziale 2. przedstawiam ogólną teorię ochrony informacji przed szumem kolektywnym. Omówię tzw. podprzestrzenie nierozspójniane oraz podprzestrzenie bezszumowe. Rozdział 3. zawiera opis geometrii podprzestrzeni singletowych. W rozdziale 4. zajmuję się analizą konkretnego czterofotonowego stanu światła (a także jego trójfotonowego odpowiednika), jego własnościami, technikami wytwarzania oraz mierzenia. W rozdziale 5. proponuję łatwe doświadczenie symulujące działanie silnego szumu kolektywnego, polegające na włożeniu w wiązkę obracających się płytek fazowych. Rozdział 6. podsumowuje pracę oraz daje wgląd w możliwe dalsze kierunki badań. Dodatek A zawiera wyprowadzenia matematycznych aspektów z rozdziału 3.

Rozdział 2

Podprzestrzenie nierozspójniane i podukłady bezszumowe (DFS i NS)

W niniejszym rozdziale zajmę się geometrią podprzestrzeni nierozspójnianych i podukładów bezszumowych. Ograniczę się wyłącznie do dekoherencji polegającej na działaniu kolektywnego szumu — tj. losowej operacji unitarnej działającej tak samo na każdą cząstkę

$$|\psi\rangle \mapsto U^{\otimes n}|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

gdzie $|\psi\rangle$ jest stanem n -cząstkowym, U jest operatorem unitarnym działającym na pojedynczą cząstkę, a $U^{\otimes n} = U \otimes \dots \otimes U$ (n razy). Przyjmę, że szum może być dowolnie duży, zatem wszystkie sposoby ochrony przed szumem będą polegały na zastosowaniu stanów o określonej symetrii. Ograniczę się do rozróżnialnych cząstek o dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta. Tym samym wszelkie uśrednienia będą się działy względem iloczynów tensorowych grupy $SU(2)$.

Powyższe założenia są spełnione w dwóch ważnych przypadkach. Pierwszy to elektrony oddzielone przestrzennie, na które działa pole magnetyczne, o skali zmienności przestrzennej znacznie większej niż wzajemne odległości elektronów. Takie pole wywołuje precesję spinu, która o ile może być duża, to jest taka sama dla każdego elektronu osobno. Drugi, to szybka seria kilku fotonów podróżujących przez światłowód.

Działanie kanału, w postaci światłowodu z kolektywnym szumem, jest dane przez następującą wielkość

$$\mathcal{C}_{p(U)}[\rho] = \int_{SU(2)} p(U) U^{\otimes n} \rho U^{\dagger \otimes n} dU, \quad (2.2)$$

gdzie $U \in SU(2)$, $p(U)$ jest dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa, a dU jest miarą Haara. Dla jednorodnego prawdopodobieństwa $p(U) = 1$ macierz gęstości stanu ulega uśrednieniu ze względu

na obroty polaryzacji. Więcej o samym procesie uśredniania, a także jego symulacji, znajduje się w rozdziale 5. Stan uśredniony jest w szczególności odporny na działanie dowolnego szumu (tj. dowolnego $p(U)$). Tym samym w całej niniejszej pracy będziemy badać kanał dla $p(U) = 1$.

Do przesyłania informacji przez taki kanał potrzebujemy stanów, które są niezmiennicze ze względu na działanie kanału kwantowego, tj. spełniają związek

$$\mathcal{C}[\rho] = \rho \iff \forall U \in SU(2) \ U^{\otimes n} \rho U^{\dagger \otimes n} = \rho, \quad (2.3)$$

gdzie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{p(U) \equiv 1}$. Szczególnie, ale nie wyłącznie, interesują nas stany czyste. Zbiór stanów czystych spełniających (2.3) nazywamy podprzestrzenią nierozspójnianą (DFS), a zbiór stanów mieszanych — podukładem bezszumowym (NS).

2.1. Rozkład Clebscha-Gordana

W znajdowaniu stanów odpornych na kolektywną dekoherencję znacznie pomaga rozkład Clebscha-Gordana — tj. wyrażenie iloczynu tensorowego reprezentacji grupy przez sumę prostą reprezentacji grupy. Zobaczmy jak on działa dla kilku przykładowych iloczynów przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{1/2})^{\otimes 2} &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \\ (\mathcal{H}_{1/2})^{\otimes 3} &= \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_{3/2} \\ (\mathcal{H}_{1/2})^{\otimes 4} &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie \mathcal{H}_s to reprezentacja spinu s . Oczywiście wymiar odpowiedniej reprezentacji to $\dim \mathcal{H}_s = 2s+1$. Kolektywna zmiana polaryzacji nie miesza różnych reprezentacji. W szczególności, dla przypadku dwóch cząstek, stany singletowy nigdy nie zmiesza się ze stanem trypletowym.

Podprzestrzenie singletowe, czyli o spinie 0, są niezmiennicze ze względu na kolektywne obroty polaryzacji. Tym samym będziemy zamiennie używali nazw podprzestrzenie singletowe i podprzestrzenie nierozspójniane. Dla dwóch cząstek podprzestrzeń singletowa ma wymiar 1, zatem nie możemy zakodować w niej żadnej informacji kwantowej. Za to dla czterech cząstek mamy dokładnie 2-wymiarową przestrzeń singletową, w której możemy zakodować dokładnie jeden qubit. Więcej o tym kodowaniu jest w rozdziale 4. Dla trzech cząstek mamy dwuwymiarową podprzestrzeń spin- $\frac{1}{2}$, czyli dubletową. W niej również możemy kodować informację kwantową, jednak przy pomocy stanu mieszanego (czyli w podukładzie bezszumowym).

W ogólności [4, 5], reprezentację n cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ da się wyrazić następująco

$$\left(\mathcal{H}_{1/2}\right)^{\otimes n} = \bigoplus_{s=(n \bmod 2)/2}^{n/2} C_{n/2,s} \mathcal{H}_s \quad (2.5)$$

$$C_{n/2,s} = \frac{2s+1}{n/2+s+1} \binom{n}{n/2+s}, \quad (2.6)$$

gdzie w (2.5) iterator s (który może być wielokrotnością $\frac{1}{2}$) zwiększamy o jeden. Analogiczną konwencję przyjmujemy we wszystkich innych sumach i sumach prostych. Wyprowadzenie powyższego wzoru znajduje się w dodatku A. Szczególnie interesuje nas podprzestrzeń singletowa ($s=0$), która występuje tylko dla parzystej liczby cząstek ($n=2k$). Dla przypomnienia, $C_{k,0}$ to dobrze znane w matematyce liczby Catalana.

Do analizy stanów z podukładów bezszumowych przydatny jest następujący związek:

$$d\mathcal{H}_s := \underbrace{\mathcal{H}_s \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_s}_{d \text{ razy}} = \mathbb{C}^d \otimes \mathcal{H}_s. \quad (2.7)$$

Czyli ilekroć mamy do czynienia z degeneracją (w postaci sumy d reprezentacji o spinie s), tylekroć możemy w takiej sumie zakodować qudit. Przy czym przy przejściu przez kanał część spinowa zostanie uśredniona do stanu całkowicie mieszanego

$$\mathcal{C}[\rho_{NS} \otimes \rho_s] = \rho_{NS} \otimes \frac{1}{2s+1} \mathbb{1}_{2s+1}. \quad (2.8)$$

2.2. Klasyczna i kwantowa pojemność kanału

W przypadku przejścia przez kanał dowolnego stanu n cząstkowego zadanego przez macierz gęstości ρ otrzymujemy

$$\mathcal{C}[\rho] = \bigoplus_{s=(n \bmod 2)/2}^{n/2} \rho_{C_{n/2,s}} \otimes \frac{1}{2s+1} \mathbb{1}_{2s+1}. \quad (2.9)$$

Z klasycznego punktu widzenia, nasz słownik ma długość

$$\sum_{s=n/2 \bmod 2}^{n/2} C_{n/2,s} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}. \quad (2.10)$$

Nie jest to szczególnie imponujące, gdyż znacznie prostsza metoda przesyłania $0-n$ fotonów (typu: na i -tej pozycji jest foton lub nie) daje słownik długości 2^n , również odporny na kolektywną

dekoherencję.

Z kwantowego punktu widzenia, niestety, dysponujemy mniejszą przestrzenią. Dekoherencja uniemożliwia trzymanie spójnej superpozycji między elementami różnowymiarowych reprezentacji. Tym samym, przy danej liczbie fotonów, maksymalny wymiar przesyłanego qudita to $\max_s C_{n/2,s}$. Skupimy się wyłącznie na podprzestrzeniach singletowych ($s = 0$) i dubletowych ($s = \frac{1}{2}$). Motywacje są dwie:

- To są najprostsze podprzestrzenie, odpowiednio dla parzystej i nieparzystej liczby cząstek.
- Wymiar przestrzeni singletowej dla $2k$ cząstek jest równy wymiarowi przestrzeni dubletowej dla $2k - 1$ cząstek (tj. $C_{k,0} = C_{k-1/2,1/2}$). Ma to poważne konsekwencje dla ochrony informacji w przypadku straty fotonu.

Wymiar przestrzeni singletowej dla n fotonów to

$$C_{n/2,0} \approx \frac{2^{n+3/2}}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}. \quad (2.11)$$

Rozdział 3

Geometria przestrzeni singletowej

W niniejszym rozdziale zajmę się geometrią przestrzeni singletowej, złożonej z parzystej liczby cząstek o spinie $\frac{1}{2}$. Wprowadzę pojęcie stanu paroseparowalnego po czym skonstruuję bazę przestrzeni singletowej za [6]. Następnie przejdę do liczenia iloczynów skalarnych dowolnych stanów paroseparowalnych przy pomocy pewnych diagramów. Udowodnię, że strata pojedynczego fotonu ze stanu singletowego nigdy nie powoduje straty informacji. Innymi słowy pokażę, że dla stanu z podprzestrzeni nierozspójnianej strata pojedynczego fotonu przeprowadza go w podukład bezsumowy przy zachowaniu pełnej niesionej informacji kwantowej.

3.1. Baza podprzestrzeni singletowej

Dla przypomnienia (2.5), dla $n = 2k$ qubitów wymiar przestrzeni singletowej to k -ta liczba Catalana

$$C_{k,0} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}. \quad (3.1)$$

Oprócz samej znajomości wymiaru przestrzeni singletowej, warto znać jej geometrię. Niech

$$|s_{i,j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow \downarrow\rangle - |\uparrow \leftrightarrow\rangle)_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{i\leftrightarrow}^\dagger a_{j\downarrow}^\dagger - a_{i\uparrow}^\dagger a_{j\leftrightarrow}^\dagger) |\Omega\rangle. \quad (3.2)$$

będzie dwucząstkowym stanem singletowym złożonym z i -tego i j -tego qubitów, podczas gdy $|\Omega\rangle$ to stan próżni, a a^\dagger to operatory kreacji odpowiednich modów.

W oczywisty sposób do podprzestrzeni singletowej tworzonej przez $2k$ cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ będą

należały wszystkie stany w postaci (dalej nazywane stanami paroseparowalnymi)

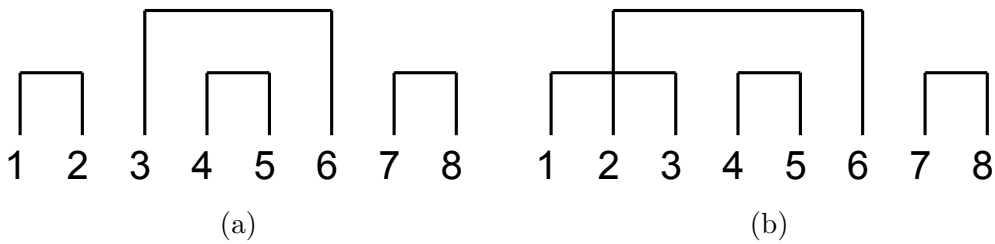
$$|s_{\mathcal{P}}\rangle = \bigotimes_{i=1}^k |s_{\mathcal{P}(2i-1), \mathcal{P}(2i)}\rangle, \quad (3.3)$$

gdzie $\mathcal{P}: \{1, 2, \dots, 2k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2k\}$ jest permutacją. Dla uproszczenia sprawy (i nie liczenia tych samych stanów wielokrotnie, i to z różnymi znakami), niech pierwszy wyraz będzie mniejszy od drugiego $\mathcal{P}(2i-1) < \mathcal{P}(2i)$ oraz niech dla nieparzystych indeksów będzie to funkcja rosnąca $\mathcal{P}(2i-1) < \mathcal{P}(2i+1)$. Takich stanów, lub równoważnie - podziałów $2k$ -elementowego zbioru na k podzbiorów dwuelementowych, jest

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!! \approx \sqrt{2} \left(\frac{2}{e}\right)^n n^n, \quad (3.4)$$

czyli jest ich znacznie więcej niż wymiar podprzestrzeni singletowej (2.11). Zresztą, na razie nie wiemy nawet, czy wszystkie elementy podprzestrzeni singletowej da się wyrazić przy pomocy kombinacji liniowych zbioru $\{|s_{\mathcal{P}}\rangle\}$.

Ograniczmy się zatem do pewnych bardzo specyficznych stanów paroseparowalnych (zadanych przez permutacje $\bar{\mathcal{P}}$) — takich, że jak narysujemy okrąg, a na nim kolejne numery cząstek, a przez cięciwy oznaczymy pary będące dwucząstkowymi singletami, to żadna z cięciw się nie przetnie. Alternatywnie, rozważmy poprawne ciągi k lewych i k prawych nawiasów. Przez poprawność rozumiem takie ciągi, w których w każdym miejscu (licząc w lewo) jest więcej lewych nawiasów niż prawych. Np. dla $k=2$ $()()$ i $(())$ to poprawne nawiasowania, a $))()$, $(())$ i $()()$ to niepoprawne nawiasowania. Odpowiadające sobie nawiasy reprezentują pojedynczą parę singletową. Przykładowy diagram nawiasowy znajduje się na rys. 3.1 (by uzyskać z niego cięciwy, należy zawinąć numery w okrąg).



Rysunek 3.1: Diagramy stanów paroseparowalnych dla $n=8$ fotonów. Linia pomiędzy i -tym i j -tym fotonem oznacza, że w skład wchodzi stan singletowy $|s_{ij}\rangle$. (a) Stan z kanonicznej bazy (nie zawiera przecięć). (b) Stan nie należący do kanonicznej bazy (zawiera przecięcia).

Takich diagramów cięciw, czy też nawiasowań, jest dokładnie tyle co k -ta liczba Catalana [7], a dowód jest prostym zadaniem kombinatorycznym. Skoro $|s_{\bar{\mathcal{P}}}\rangle$ należą do przestrzeni singletowej i jest ich dokładnie tyle, jaki jest jej wymiar — stanowią one bazę wtedy, i tylko wtedy, gdy są liniowo niezależne. Przytoczę dowód liniowej niezależności domniemanej bazy za [6]. Pokażemy nie

wprost, że domniemany układ nie może być liniowo zależny.

Rozłóżmy domniemaną bazę na superpozycję stanów produktowych (w bazie $\{|\leftrightarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$), po czym posortujmy je leksykograficznie. Przyjmujemy, że w naszym alfabetcie \leftrightarrow jest przed \uparrow , a najważniejsze litery są po lewej (a zatem np. $|\leftrightarrow\uparrow\leftrightarrow\uparrow\rangle$ jest przed $|\uparrow\leftrightarrow\uparrow\leftrightarrow\rangle$). Dla każdego stanu bazowego wybieramy etykietkę w postaci pierwszego leksykograficznie składnika (czyli np. dla $|s_{12}s_{34}\rangle$ jest to $|\leftrightarrow\uparrow\leftrightarrow\uparrow\rangle$). Chcemy pokazać, że dla różnych stanów bazy etykietki są różne. W ramach splątanej pary, musi być w etykietce \leftrightarrow i \uparrow , przy czym \leftrightarrow stoi na pierwszej pozycji. Zamiana \leftrightarrow na $(\uparrow$ na $)$ daje bijekcję między etykietką stanu a odpowiadającym mu nawiasowaniem.

Sortujemy bazę względem etykietek (znów leksykograficznie), oznaczając jej elementy jako $|b_i\rangle$. Układ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum c_i |b_i\rangle = 0, \quad (3.5)$$

gdzie co najmniej jeden współczynnik zespolony c_i jest niezerowy. Niech c_{i_0} będzie niezerowym współczynnikiem o najmniejszym indeksie. Zatem suma zawiera stan odpowiadający etykietce. Żaden z kolejnych stanów (tj. z $i > i_0$) nie zawiera składnika odpowiadającego etykietce, zatem suma nie może być równa zero. Sprzeczność. Na mocy dowodu nie wprost, układ $\{|b_i\rangle\}$ stanowi bazę.

Należy jednak podkreślić, że nie jest to baza ortogonalna. W istocie żadne z jej elementów nie są do siebie prostopadłe! Przy okazji warto zwrócić uwagę, że nie każdy podzbiór stanów paroseparowalnych (3.3) o mocy $C_{k,0}$ stanowi bazę podprzestrzeni singletowej.

3.2. Iloczyn skalarny w podprzestrzeni singletowej

Skoro mamy do czynienia z nieortogonalną bazą, istotna jest dla nas znajomość jej iloczynów skalarnych. Szerzej, rozważmy iloczyn dwóch dowolnych stanów paroseparowalnych (3.3), czyli $\langle s'_{\mathcal{P}} | s_{\mathcal{P}} \rangle$.

Dla uproszczenia sprawy podzielmy go na części indeksowane r , które możemy zapisać w postaci produktowej, tj. takie

$$\langle s_{\mathcal{P}} | s'_{\mathcal{P}} \rangle = \prod_{r=1}^p \langle s_{\mathcal{P}_r} | s'_{\mathcal{P}_r} \rangle, \quad (3.6)$$

że żadnego z czynników nie da się już podzielić na mniejsze (a $|s_{\mathcal{P}_r}\rangle$ i $|s'_{\mathcal{P}_r}\rangle$ to znormalizowane stany kwantowe). Iloczyn skalarny każdego z tych czynników jest liczony w przestrzeni n_r -cząstkowej.

Obliczmy taki częściowy iloczyn skalarny. W tym celu zbadajmy z czym się może sparować $\langle \leftrightarrow_{i_1} \uparrow_{i_2} |$. Otóż jeśli spojrzymy na ostatnią cząstkę, musi się sparować z $|\uparrow_{i_2} \leftrightarrow_{i_3}\rangle$. Zaś ostatni wyraz, musi się sparować z $\langle \leftrightarrow_{i_3} \uparrow_{i_4} |$ itd. Idziemy tak aż się kółko zamknie, a zatem i wyczerpiemy możliwości w

czyli tyle co być powinno (2.5). W oczywisty sposób transformują się jak dublet¹.

Zauważmy, że stany o różnym rzucie spinu są ortogonalne, tj.

$$\langle d_{i\leftrightarrow} | d_{j\uparrow} \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Można się o tym przekonać namacalnie, widząc, że w każdym składniku $|d_{i\leftrightarrow}\rangle$ jest o jeden więcej $|\uparrow\rangle$ niż w $|d_{j\uparrow}\rangle$.

Zaś stany o tym samym rzucie spinu mają ten sam iloczyn skalarny jak odpowiednie im stany bazy przestrzeni singletowej

$$\langle d_{i\leftrightarrow} | d_{j\leftrightarrow} \rangle = \langle d_{i\uparrow} | d_{j\uparrow} \rangle = \langle b_i | b_j \rangle. \quad (3.11)$$

Pierwsza równość jest konsekwencją faktu, że $|d_{i\leftrightarrow}\rangle$ i $|d_{i\uparrow}\rangle$ różnią się zamianą wszystkich \leftrightarrow na \uparrow i vice versa. Drugą równość pokażemy korzystając z rozpisania

$$|b_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\leftrightarrow\rangle |d_{i\leftrightarrow}\rangle + |\uparrow\rangle |d_{i\uparrow}\rangle \right). \quad (3.12)$$

Biorąc iloczyn skalarny dwóch stanów singletowych, pamiętając o (3.10) i pierwszej części (3.11), otrzymujemy część drugą. Obserwacja uogólnia się na dowolne elementy dubletowe otrzymane z układu nadzupelnego (3.6) w sposób analogiczny do (3.9).

Tym samym możemy sprowadzić liczenie iloczynów skalarnych w bazie dubletowej do liczenia iloczynów w przestrzeni singletowej. Można wprowadzić graficzną notację do liczenia iloczynów skalarnych przestrzeni dubletowej, analogiczną do tej dla stanów singletowych.

3.4. Dlaczego strata pojedynczego fotonu nie niszczy informacji

W tym podrozdziale pokażę, że strata pojedynczego fotonu ze stanu singletowego nie powoduje straty informacji kwantowej. Niech informacja kwantowa będzie zakodowana w amplitudach, tj.

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |b_i\rangle, \quad (3.13)$$

a odpowiadająca takiemu stanowi macierz gęstości to $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Istotna jest wiedza, który foton został stracony. W teorii zawsze jest możliwe zmierzenie, który foton został zgubiony bez zaburzenia stanu. W praktyce, już po samym pomiarze będziemy wiedzieli który detektor nie kliknął. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że zgubiliśmy pierwszy foton. Otrzymujemy macierz gęstości będącą

¹Przy czym uwaga — $|d_{i\leftrightarrow}\rangle$ transformuje się jak polaryzacja pionowa $|\uparrow\rangle$, a $|d_{i\uparrow}\rangle$ — pozioma $|\leftrightarrow\rangle$. Wybór konwencji, o ile tu wydaje się mylący, ułatwi nam nieco życie w opisywaniu pomiarów w dalszej części pracy magisterskiej.

śladowaniem ρ po stanach pierwszego fotonu

$$\begin{aligned} \rho_{\text{po stracie}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j^* |d_{i\leftrightarrow}\rangle \langle d_{j\leftrightarrow}| + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j^* |d_{i\uparrow}\rangle \langle d_{j\uparrow}| \\ &= \rho_L \otimes \frac{1}{2} \mathbb{1}_2, \end{aligned} \tag{3.14}$$

przy czym $\rho_L \cong \rho$. Oczywiście powyższe macierz gęstości ρ_L jest fizycznie czym innym niż ρ odpowiadające początkowemu stanowi singletowemu. Niemniej, niesie dokładnie tę samą informację (ma takie same elementy macierzowe, mimo iż baza jest fizycznie inna).

Dajmy na to, że zamiast zgubienia fotonu mierzymy jego polaryzację. O ile po pomiarze stan pozostałych fotonów jest czysty (np. zmierzylismy $|\leftrightarrow\rangle$), więc stan reszty to kombinacja liniowa $|d_{i\leftrightarrow}\rangle$), to po propagacji przez ośrodek staje się stanem mieszanym (2.8), dokładnie takim samym jak (3.14).

Tym samym pokazaliśmy, że informacja niesiona w stanach z podprzestrzeni nierozspójnianej (DFS) zawsze jest odporna na stratę pojedynczego fotonu. Powstały stan jest mieszanym stanem dubletowym, przy czym mieszanie następuje po stopniach swobody nie niosących przesyłanej informacji. Cała przekazywana informacja kwantowa siedzi w podukładzie bezsumowym (NS).

Rozdział 4

Czterofotonowy stan światła niosący qubit

W niniejszym rozdziale rozważę czterofotonowy stan światła, który jest zarówno odporny na przejście przez światłowód obracający polaryzację, jak i stratę jednego fotonu. Innymi słowy, zademonstruję praktyczne zastosowanie ogólnej teorii do najprostszego przypadku. Omawiany stan został wprowadzony w pracy [2]. Analiza geometrii stanu sześciofotonowego znajduje się w [8].

Na początku zdefiniuję stan i zademonstruję jego właściwości. Następnie przedstawię sposób jego wytwarzania, korzystający ze zjawiska spontanicznego podziału częstości. Pokażę, dla których stanów łatwo uzyskać, a które — trudniej. Zajmę się analizą schematów pomiaru stanu kwantowego, omawiając kilka nierównoważnych wariantów. Przedstawię również wyniki dla stanu po stracie fotonu. Pod koniec zademonstruję przykładowe zastosowania omawianego stanu.

4.1. Geometria

Znamy wymiar, a także ogólną postać bazy, przestrzeni singletowej — patrz podrozdział 3.1. Dla czterech fotonów podprzestrzeń nierozspójniana jest 2-wymiarowa. Tym samym możemy w niej zakodować dokładnie jeden logiczny qubit. Niemniej, wygodniej jest skorzystać z układu nadzupelnego, tj. wszystkich stanów paroseparowalnych. Są trzy takie:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |s_{12}\rangle|s_{34}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_2\rangle - |a_3\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= |s_{13}\rangle|s_{42}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_3\rangle - |a_1\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= |s_{14}\rangle|s_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle - |a_2\rangle) \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $|a_i\rangle$ to ortogonalne stany pomocnicze

$$\begin{aligned} |a_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\leftrightarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle) \\ |a_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\uparrow\leftrightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\leftrightarrow\uparrow\leftrightarrow\rangle) \\ |a_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\uparrow\uparrow\leftrightarrow\rangle + |\uparrow\leftrightarrow\leftrightarrow\uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wprowadzenie stanów pomocniczych uprości niektóre obliczenia. Należy jednak podkreślić, że stany $|a_i\rangle$ nie należą do podprzestrzeni odpornej na dekoherencję. Konwencja oznaczania stanów jest inna niż np. w [9] (i w pewnym sensie bardziej naturalna), by iloczyn skalarny między dwoma różnymi stanami (3.8) zawsze był taki sam.

Niech $|\psi_{i\perp}\rangle$ to będzie stan ortogonalny do $|\psi_i\rangle$ w podprzestrzeni nierozspójnianej. Te 6 wymienionych stanów jest szczególnie łatwo wytworzyć i zmierzyć. Poniżej znajdują się podstawowe własności geometryczne wyżej wymienionych:

$$\begin{aligned} \langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \frac{3}{2}\delta_{ij} - \frac{1}{2} \\ |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle &= 0 \\ |\psi_{i\perp}\rangle &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2\sqrt{3}} (|\psi_j\rangle - |\psi_k\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}} (|a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle - 3|a_i\rangle) \\ \langle\psi_{i\perp}|\psi_j\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_k \epsilon_{ijk} \\ \langle\psi_{i\perp}|\psi_{j\perp}\rangle &= \frac{3}{2}\delta_{ij} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Jeśli naniesiemy stany $|\psi_i\rangle$ na sferę Blocha, znajdą się w jednej płaszczyźnie, a kąty między nimi będą wynosiły 120° . Dodatkowo, możemy pokusić się na wypisanie dwóch wyróżnionych stanów, poniekąd analogicznych do polaryzacji kołowych

$$\begin{aligned} |\psi_L\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} (|\psi_1\rangle + e^{+i2\pi/3}|\psi_2\rangle + e^{-i2\pi/3}|\psi_3\rangle) \\ |\psi_R\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} (|\psi_1\rangle + e^{-i2\pi/3}|\psi_2\rangle + e^{+i2\pi/3}|\psi_3\rangle). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Qubit logiczny możemy zakodować w przy pomocy ortogonalnych stanów z podprzestrzeni nierozspójnianej — tab. 4.1. Naszą domyślną parametryzacją będzie

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_{1\perp}\rangle = \cos(\theta/2)|\psi_1\rangle + \sin(\theta/2)\exp(i\varphi)|\psi_{1\perp}\rangle. \quad (4.5)$$

Przygotowani od strony matematycznej, możemy śmiało przejść zarówno do analizy straty fotonu,

	α	β	θ	φ
$ \psi_1\rangle$	1	0	0	0
$ \psi_2\rangle$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$2\pi/3$	0
$ \psi_3\rangle$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$2\pi/3$	π
$ \psi_{1\perp}\rangle$	0	1	π	0
$ \psi_{2\perp}\rangle$	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\pi/3$	π
$ \psi_{3\perp}\rangle$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$\pi/3$	0
$ \psi_L\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$i/\sqrt{2}$	$\pi/2$	$\pi/2$
$ \psi_R\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$	$\pi/2$	$3\pi/2$

Tabela 4.1: Tabela rozpisania wymienionych stanów w bazie (4.5).

wytwarzania stanu oraz dokonywania na nim pomiaru.

4.2. Strata jednego fotonu

Przekonajmy się bezpośrednio co robi z czterofotonowym stanem strata jednego fotonu. Z podrozdziału 3.4 znamy już ogólną teorię straty jednego fotonu ze stanu DFS. W tym podrozdziale nie tylko chcemy się naocznie przekonać jak wygląda strata w przypadku stanu czterofotonowego, ale chcemy też mieć jawne wyrażenia, konieczne do analizy pomiaru. Należy zwrócić uwagę, że pracujemy w innej bazie, niż kanoniczna.

Dla ustalenia uwagi rozważmy stratę pierwszego fotonu. Dla stanu czterofotonowego ρ_4 trójcząstkowa macierz gęstości to

$$\rho_3 = \text{Tr}_1 \rho_4 = \langle \leftrightarrow_1 | \rho_4 | \leftrightarrow_1 \rangle + \langle \uparrow_1 | \rho_4 | \uparrow_1 \rangle. \quad (4.6)$$

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że trójcząstkowa macierz gęstości to

$$\rho_3 = \begin{bmatrix} \frac{|\alpha|^2}{2} & 0 & \frac{\alpha\beta^*}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha|^2}{2} & 0 & \frac{\alpha\beta^*}{2} \\ \frac{\alpha^*\beta}{2} & 0 & \frac{|\beta|^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^*\beta}{2} & 0 & \frac{|\beta|^2}{2} \end{bmatrix} = \rho_L \otimes \frac{1}{2} \mathbb{1}_2, \quad (4.7)$$

gdzie wektory bazy to kolejno $|\phi_{1\leftrightarrow}\rangle$, $|\phi_{1\uparrow}\rangle$, $|\phi_{1\perp\leftrightarrow}\rangle$ i $|\phi_{1\perp\uparrow}\rangle$. Macierz ρ_3 podana powyżej jest obcięta do przestrzeni dubletowej, wszystkie inne elementy macierzowe są równe zeru. Jawna postać

wektorów bazy jest następująca

$$\begin{aligned}
|\phi_{1\leftrightarrow}\rangle &= \sqrt{2}\langle\leftrightarrow_1|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\leftrightarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\leftrightarrow\rangle) \\
|\phi_{1\uparrow}\rangle &= \sqrt{2}\langle\uparrow_1|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\downarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\leftrightarrow\downarrow\rangle) \\
|\phi_{1\perp\leftrightarrow}\rangle &= \sqrt{2}\langle\leftrightarrow_1|\psi_{1\perp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\leftrightarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\leftrightarrow\rangle - 2|\leftrightarrow\downarrow\downarrow\rangle) \\
|\phi_{1\perp\uparrow}\rangle &= \sqrt{2}\langle\uparrow_1|\psi_{1\perp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\leftrightarrow\downarrow\leftrightarrow\rangle + |\leftrightarrow\leftrightarrow\downarrow\rangle - 2|\downarrow\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. Wytwarzanie

Praktycznym źródłem splątanych par fotonów jest parametryczny podział częstotliwości. Jest to proces nieliniowy, w którym fotony wiązki pompującej dzielą się na splątane pary fotonów. Bardziej szczegółowe wprowadzenie do tego procesu znajduje się choćby w [10] i [11].

W parametrycznym podziale częstotliwości II typu jest generowany stan ściśniętej próżni, czyli

$$Z \exp \left[-i\chi A_p \left(\hat{a}_{1\leftrightarrow}^\dagger \hat{a}_{2\uparrow}^\dagger + \hat{a}_{1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{2\leftrightarrow}^\dagger \right) \right] |\Omega\rangle, \tag{4.9}$$

gdzie Z to normalizacja, χA_p — amplituda wiązki pompującej przez stałą charakteryzującą oddziaływanie nieliniowe.

W szczególności zależy nam na uzyskaniu dwóch splątanych par fotonów. Można tego dokonać na dwa sposoby — stworzenie dwóch par osobno [12], lub stworzenie stanu czterofotonowego [13, 14]. Zasadniczo wydajność obu procesów jest podobna. Oba z tych procesów wymagają postselekcji — tj. uwzględnienia tylko niektórych wyników pomiarów.

Skupimy się na sytuacji, w której na początku dysponujemy dwoma parami splątanych fotonów tworzącymi stan $|\psi_1\rangle$. Możemy zinterferować drugi z trzecim fotonem przy pomocy płytek opóźniających fazę 4-tej wiązki i płytki światłodzielnej niezależnej od polaryzacji

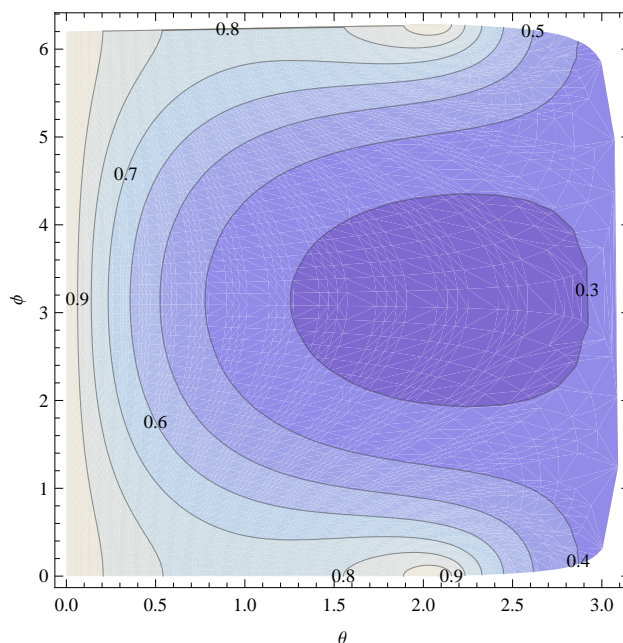
$$U_{23}(\gamma, \delta) = (R_z(\gamma)R_y(\delta)R_z(-\gamma)) \otimes \mathbb{1}_{\uparrow\downarrow}. \tag{4.10}$$

Jeśli uwzględnimy tylko te rezultaty, w których nie wystąpiło sklejenie fotonów (tj. dla każdego kanału jest dokładnie jeden foton), otrzymamy

$$|\psi\rangle = \left(\cos^2(\gamma) - \frac{1}{2}e^{i2\delta} \sin^2(\gamma) \right) |\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i2\delta} \sin^2(\gamma) |\psi_{1\perp}\rangle \tag{4.11}$$

Tym samym możemy uzyskać dowolny qubit logiczny z czterofotonowej podprzestrzeni singletowej. Niestety, taka operacja ma swoje wady. Po pierwsze, kąty uzyskanego stanu (tj. θ i φ jak w (4.5))

nie są bezpośrednio kątami jakie zadajemy na optyce pasywnej. Po drugie, i znacznie istotniejsze, stosując taką operację musimy korzystać z postselekcji, tj. uwzględniamy tylko takie realizacje eksperymentu, w których kliknął foton w każdym z kanałów. Efektywność zależy od stanu jaki chcemy uzyskać i waha się pomiędzy 25% a 100% i jest zobrazowana na rys. 4.1.



Rysunek 4.1: Efektywność postselekcji dla tworzenia dowolnego czterofotonowego qubitu logicznego ze stanu $|\psi_1\rangle = |s_{12}s_{34}\rangle$ przy pomocy interferencji drugiego z trzecim kanałem. Zwróć uwagę, że wykorzystanie innego stanu bazowego i interferencja innej pary kanałów dałaby inny wynik (acz związany prostą symetrią z zaprezentowanym). Tylko stany $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ (zamiana drugiego fotonu z trzecim) są otrzymywane z wydajnością 100%.

4.4. Pomiar

W teorii zawsze można dokonać pomiaru w dowolnej bazie. Rzeczywistość laboratoryjna jest znacznie bardziej drastyczna. W szczególności nie każde oddziaływanie da się prosto zrealizować — choćby jakakolwiek interakcja dwóch fotonów jest procesem skrajnie mało efektywnym. Z tego powodu ograniczymy się do dwóch rodzajów pomiarów:

- Pomiar lokalny, tj. dla każdego fotonu osobno mierzymy jego polaryzację w wybranej bazie.
- Ogólny pomiar przy pomocy operacji lokalnych i klasycznej komunikacji (ang. Local Operations and Classical Communication, LOCC), tj. sekwencyjne wykonywanie pomiarów lokalnych, przy czym wynik jednego może wpływać na dobór bazy w kolejnym.

Zajmiemy się kwestią pomiaru zarówno stanu 4-fotonowego, jak i odpowiadającego mu 3-fotonowego. Cały czas będzie nas interesowała odpowiednio podprzestrzeń nierozspójniana i podukład bezszumowy. Pod względem pomiaru interesują nas trzy rzeczy:

- Kiedy można dokonać jednoznacznego pomiaru (ang. unambiguous measurement) odróżniającego dany stan od ortogonalnego?
- Gdy nie można dokonać jednoznacznego pomiaru, jaka jest efektywność rozróżniania danego stanu od ortogonalnego?
- Jak zrobić tomografię stanu, tj. jak przy pomocy jednego (lub kilku) ustawień aparatury pomiarowej i dowolnej liczby kopii stanu, odzyskać jego macierz gęstości?

Jako miarę jednoznaczności pomiaru przyjmijmy informację wzajemną Shannona¹ zakładając, że z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ dajemy na wejściu stan $|\psi\rangle$ i $\frac{1}{2}$ — do niego prostopadły $|\psi_\perp\rangle$ (oczywiście — w ramach przestrzeni nierozspójnianej).

$$I(\phi_{\vec{j}}; |\psi\rangle) = \sum_{i \in \{\cdot, \perp\}} \sum_{\vec{j} \in \{\cdot, \perp\}^4} \frac{1}{2} \left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi_i \rangle \right|^2 \log_2 \left(\frac{\left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi_i \rangle \right|^2}{\sum_{k \in \{\cdot, \perp\}} \left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi_k \rangle \right|^2} \right), \quad (4.12)$$

gdzie $|\phi_{\vec{j}}\rangle$, w naszym przypadku, jest sparametryzowany 5 kątami

$$|\phi_{\vec{j}}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j_1} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\theta_2/2) \\ \sin(\theta_2/2) \end{bmatrix}_{j_2} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\theta_3/2) \\ \sin(\theta_3/2) \exp(i\varphi_3) \end{bmatrix}_{j_3} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\theta_4/2) \\ \sin(\theta_4/2) \exp(i\varphi_4) \end{bmatrix}_{j_4}. \quad (4.13)$$

Dla przypomnienia, jawny wzór na stan prostopadły to

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \exp(i\varphi) \end{bmatrix}_{\perp} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \exp(i\varphi) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Należy się usprawiedliwić dlaczego pomiar lokalny parametryzujemy 5-ma, a nie 8-ma kątami. Lub bezpośrednio — dlaczego ograniczamy się do mierzenia pierwszego fotonu w ustalonej bazie $\{|\uparrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle\}$, a drugiego fotonu — w bazie polaryzacji liniowych? Można tak postąpić, gdyż stany z przestrzeni odpornej na dekoherencję spełniają $U^{\otimes 4}|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Zatem pomiar lokalny w dowolnych bazach można sprowadzić (przez zastosowanie odpowiedniego U) do pomiaru jak w (4.13).

¹Inną sensowną miarą jest $I_r^2(\phi_{\vec{j}}, |\psi\rangle) = \sum_{\vec{j} \in \{\cdot, \perp\}^4} \left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi \rangle \right|^4 / \left(\left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \phi_{\vec{j}} | \psi_\perp \rangle \right|^2 \right)$ — jest równe prawdopodobieństwu, że po jednym pomiarze zdołamy zgadnąć przesyłany stan.

4.4.1. Pomiar stanu czterofotonowego

Zacznijmy od analizy pomiaru stanu 4-fotonowego jako, że część wyników przyda się do analizy odpowiadającego mu stanu 3-fotonowego.

Jednoznaczny pomiar

W niniejszym śródrozdziale pokażemy, że istnieją trzy (i tylko trzy) pary stanów ortogonalnych, które możemy jednoznacznie rozróżnić przy pomocy pomiaru lokalnego. Zacznijmy od jawnego pokazania tych stanów za [14], następnie przechodząc do numerycznych wyników dla dowolnych stanów.

Jeśli chcemy odróżnić $|\psi_1\rangle$ od $|\psi_{1\perp}\rangle$ należy dokonać pomiaru polaryzacji w bazie $\hat{\leftrightarrow}\hat{\leftrightarrow}\hat{\otimes}\hat{\otimes}$, tj. mierząc dwa pierwsze fotony w bazie polaryzacji liniowych, a dwa kolejne — w bazie obróconej względem niej o kąt 45° . Tę drugą bazę, czasem nazywaną bazą Hadamarda, wyrażamy następująco:

$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{+|\leftrightarrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\searrow\rangle &= \frac{-|\leftrightarrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Zapiszmy stan 3. i 4. fotonu w obróconej bazie:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{2} (|\leftrightarrow\downarrow\nearrow\searrow\rangle - |\leftrightarrow\downarrow\searrow\nearrow\rangle - |\downarrow\leftrightarrow\nearrow\searrow\rangle + |\downarrow\leftrightarrow\searrow\nearrow\rangle) \\ |\psi_{1\perp}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (|\leftrightarrow\leftrightarrow\nearrow\nearrow\rangle - |\leftrightarrow\leftrightarrow\nearrow\searrow\rangle - |\leftrightarrow\leftrightarrow\searrow\nearrow\rangle + |\leftrightarrow\leftrightarrow\searrow\searrow\rangle - |\leftrightarrow\downarrow\nearrow\nearrow\rangle + |\leftrightarrow\downarrow\nearrow\searrow\rangle \\ &\quad - |\leftrightarrow\downarrow\searrow\nearrow\rangle + |\leftrightarrow\downarrow\searrow\searrow\rangle + |\downarrow\leftrightarrow\nearrow\nearrow\rangle + |\downarrow\leftrightarrow\nearrow\searrow\rangle + |\downarrow\leftrightarrow\searrow\nearrow\rangle + |\downarrow\leftrightarrow\searrow\searrow\rangle). \end{aligned} \quad (4.16)$$

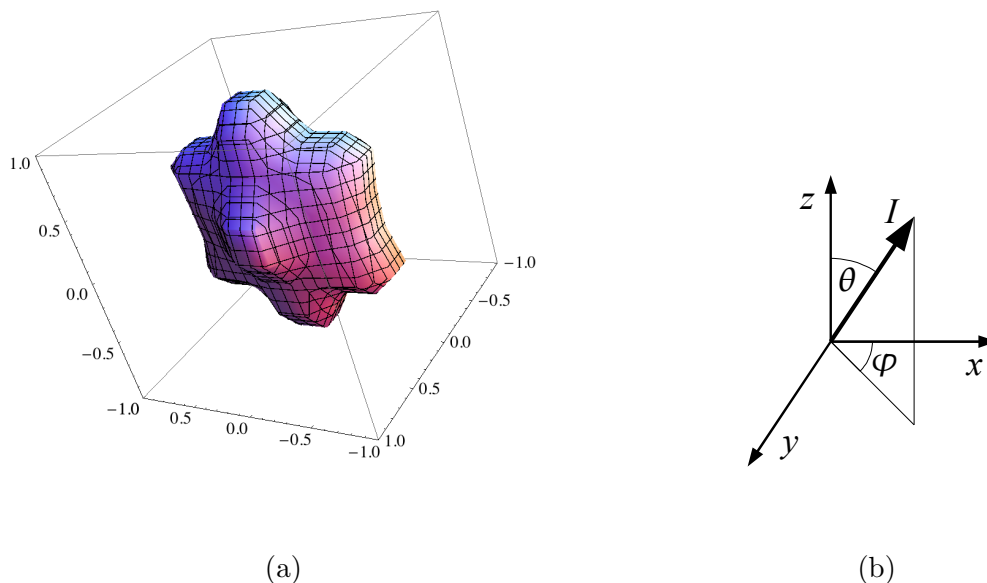
W podanej bazie $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_{1\perp}\rangle$ nie mają wspólnych elementów, tym samym pojedynczy pomiar błędnie odróżni je między sobą. Analogiczny pomiar możemy wykonać dla dowolnej pary $\{|\psi_i\rangle, |\psi_{i\perp}\rangle\}$, przy czym przy pomiarze należy obrócić bazę pomiarową jednej z par, która występuje w stanie jako dwufotonowy singlet. Zaprezentowana koncepcja teoretyczna, wraz z jej doświadczalnym potwierdzeniem, znajduje się w pracy [14].

Nie jest możliwe zastosowanie podobnej operacji w ogólnym przypadku. Poza wyszczególnionymi wyżej stanami, dobierając osobno bazy pomiarowe dla każdego fotonu, nie jesteśmy w stanie wykonać pomiaru rzutowego. W tym celu zbadajmy numerycznie wielkość

$$\max_{\theta_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4} I(\phi_j^{\vec{z}}(\theta_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4), |\psi(\theta, \phi)\rangle), \quad (4.17)$$

czyli dla każdego stanu $|\psi\rangle$ maksymalizowaną informację wzajemną po doborze bazy pomiarów —

rys. 4.2. Intuicyjnie rzecz biorąc, szukamy najlepszej bazy lokalnych pomiarów dla danego stanu. Numerycznie wykreślone I osiąga 1 tylko dla wymienionych wyżej 6 stanów.



Rysunek 4.2: (a) Wykres numerycznie znalezionej maksymalnej informacji wzajemnej dla danej pary stanów czterofotonowych (4.17). (b) Parametryzacja wykresu — kąt opowiada pozycji stanu na sferze Blocha (4.5), zaś długość — informacji wzajemnej dla odróżniania danego stanu od mu ortogonalnego (przeciwnego). Identyczna konwencja jest przyjęta we wszystkich kolejnych wykresach informacji wzajemnej.

Tomografia

Kolejnym zadaniem jest tomografia stanu. Tj. dostajemy wiele kopii nieznanego stanu, a naszym celem jest jak najdokładniejsze wyznaczenie go. Jedną ze strategii badania stanu jest zapisanie go jako

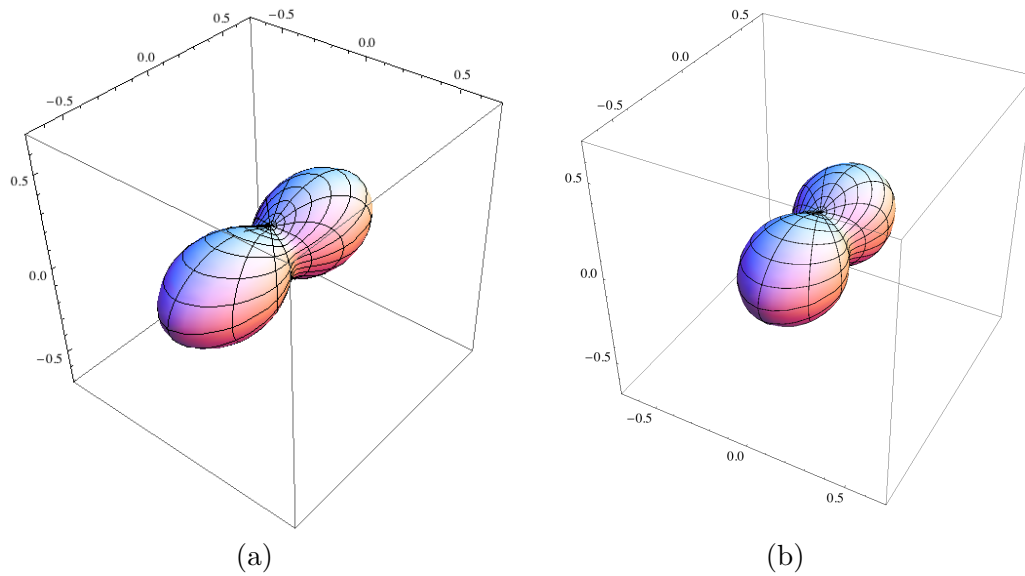
$$\rho_L = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.18)$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ to macierze Pauliego, a następnie wyznaczenie składowych wektora \vec{s} .

Możemy przy pomiarach rzutu \vec{s} na kolejne osie optymalnie dobierać bazę. Wtedy problem sprowadza się do zadania rozważanego w poprzednim rozdziale. Możemy też dla ustalonej bazy pomiarowej zliczać rzut na wybrane osie. W takiej sytuacji naturalnym podejściem do optymalizacji pomiaru wydaje się policzenie informacji wzajemnej pomiędzy dowolnym stanem (zadany z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa) a wynikiem pomiaru [15]. Niemniej, w naszym przypadku takie podejście nie jest wystarczające:

- Informacja wzajemna wynosi $I_{\text{full}} = 1 - 1/(2 \ln 2) \approx 0.28$ niezależnie od doboru bazy pomiarowej $\phi_{\vec{j}}$.
- Uśredniona informacja nie mówi nic o tym, czy mamy dostęp do pomiaru każdej ze składowych \vec{s} (być może wykonujemy pomiar rzutowy tylko na jedną z osi).

Zaproponujemy dwie arbitralnie wybrane bazy pomiarów lokalnych $\phi_{\vec{j}}$, każdą pozwalającą na wykonanie tomografii dowolnego stanu z podprzestrzeni nierozspójnianej — rys. 4.3.



Rysunek 4.3: Informacja wzajemna dla różnych stanów czterofotonowych i ustalonej bazy pomiarowej. (a) Baza tetraedralna ($\theta_2 = \arccos(-1/3)$, $\theta_3 = \arccos(-1/3)$, $\varphi_3 = 2\pi/3$, $\theta_4 = \arccos(-1/3)$, $\varphi_4 = 4\pi/3$). (b) Baza trzech polaryzacji liniowych i kołowej ($\theta_2 = 2\pi/3$, $\theta_3 = 4\pi/3$, $\varphi_3 = 0$, $\theta_4 = \pi/2$, $\varphi_4 = \pi/2$). Oznaczenia jak w rys. 4.2(b).

Lokalne operacje i komunikacja klasyczna

Powróćmy na chwilę do pytania o rozróżnialność ortogonalnych stanów, gdy mamy do dyspozycji tylko pomiary lokalne. W przypadku pojedynczego, równoczesnego pomiaru polaryzacji wszystkich fotonów jesteśmy w stanie odróżnić tylko 3 pary stanów z podprzestrzeni nierozspójnianej. Istnieje jednak nieco ogólniejszy schemat pomiarów korzystający tylko z pomiarów lokalnych. Tzw. lokalne operacje i klasyczna komunikacja (LOCC) pozwala mierzyć polaryzację fotonów po kolei, uzależniając wybór bazy danego pomiaru od rezultatów poprzednich pomiarów. Umożliwia to, w naszym przypadku, odróżnienie dwóch dowolnych ortogonalnych stanów [16].

Dla iloczynu tensorowego qubitów schemat rozróżniania $\{|\psi\rangle, |\psi_{\perp}\rangle\}$ jest następujący. Tak dobiera-

my bazę pomiarową pierwszego qubitu $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ by dla rozpisania

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi_0\rangle|\psi_0\rangle + |\phi_1\rangle|\psi_1\rangle \\ |\psi_\perp\rangle &= |\phi_0\rangle|\psi_{\perp 0}\rangle + |\phi_1\rangle|\psi_{\perp 1}\rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

zachodził związek ortogonalności powstałych stanów

$$\langle\psi_0|\psi_{\perp 0}\rangle = \langle\psi_1|\psi_{\perp 1}\rangle = 0. \quad (4.20)$$

Innymi słowy, niezależnie od wyniku pomiaru (czyli czy zostanie zmierzony stan $|\phi_0\rangle$, czy $|\phi_1\rangle$) zredukowane stany powinny być ortogonalne. Należy podkreślić, że nie ma powodu by $\langle\psi_0|\psi_1\rangle$ ani $\langle\psi_{\perp 0}|\psi_{\perp 1}\rangle$ były zerowe (w praktyce zwykle nie są). Dowód, że zawsze można wybrać bazę pomiarową czyniącą zadość wymaganym warunkom ortogonalności znajduje się w cytowanej pracy [16].

Po wykonaniu pomiaru przechodzimy do rozróżnienia albo $\{|\psi_0\rangle, |\psi_{\perp 0}\rangle\}$, albo $\{|\psi_1\rangle, |\psi_{\perp 1}\rangle\}$ wedle analogicznego schematu. Postępujemy tak rekurencyjnie aż to uzyskania zadania odróżnienia jednofotonowych stanów ortogonalnych, które wykonujemy z łatwością.

Z uwagi, że interesuje nas mierzenie stanów z podprzestrzeni nierozspójnianej, pierwszy pomiar możemy wykonać w dowolnej bazie, zaś drugi — w bazie polaryzacji liniowych. Argumentacja jest dokładnie taka sama jak w przypadku zwykłych pomiarów lokalnych (4.13):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\leftrightarrow\rangle|\psi_{\leftrightarrow}\rangle + |\updownarrow\rangle|\psi_{\updownarrow}\rangle \\ |\psi_\perp\rangle &= |\leftrightarrow\rangle|\psi_{\perp\leftrightarrow}\rangle + |\updownarrow\rangle|\psi_{\perp\updownarrow}\rangle. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Niezależnie od wyniku pierwszego pomiaru, z równań na ortogonalność (4.20) wynika, że drugi pomiar należy wykonać w bazie polaryzacji ukośnych $\{|\nearrow\rangle, |\searrow\rangle\}$ (oprócz osobliwego przypadku rozróżnienia $\{|\psi_1\rangle, |\psi_{\perp 1}\rangle\}$, w którym możemy dowolnie wybrać bazę drugiego pomiaru). Dla zwrócenia uwagi skupmy się na przypadku, w którym w pierwszym pomiarze zmierzono $|\leftrightarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_{\leftrightarrow}\rangle &= |\nearrow\rangle|\psi_{\leftrightarrow\nearrow}\rangle + |\searrow\rangle|\psi_{\leftrightarrow\neg}\rangle \\ |\psi_{\perp\leftrightarrow}\rangle &= |\nearrow\rangle|\psi_{\perp\leftrightarrow\nearrow}\rangle + |\searrow\rangle|\psi_{\perp\leftrightarrow\neg}\rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Wybór trzeciej bazy zależy w jawny sposób od pary stanów, które chcemy odróżnić. Dla zwrócenia uwagi rozważmy sytuację w której w pierwszym pomiarze było $|\leftrightarrow\rangle$, a w drugim — $|\nearrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_{\leftrightarrow\nearrow}\rangle &= |A\rangle|\psi_{\leftrightarrow\nearrow A}\rangle + |B\rangle|\psi_{\leftrightarrow\nearrow B}\rangle \\ |\psi_{\perp\leftrightarrow\nearrow}\rangle &= |A\rangle|\psi_{\perp\leftrightarrow\nearrow A}\rangle + |B\rangle|\psi_{\perp\leftrightarrow\nearrow B}\rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Z relacji ortogonalności (4.20) otrzymujemy, że $|A\rangle = (\cos(\theta_3/2), \sin(\theta_3/2) \exp(i\varphi_3))$ i $|B\rangle =$

$(-\sin(\theta_3/2), \cos(\theta_3/2) \exp(i\varphi_3))$ dla kątów

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \arctan\left(\frac{2 \sin \varphi}{\cos \varphi - \sqrt{3}/\tan \theta}\right) \\ \theta_3 &= \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \varphi_3)}\right).\end{aligned}\tag{4.24}$$

Dla szczególnego badanego stanu $\varphi = 0$ otrzymujemy $\varphi_3 = 0$ i $\theta_3 = \arctan(\sqrt{3}/\tan \theta) - \pi/4$.

Pomiar polaryzacji ostatniego fotonu jest już prosty. Niemniej, oprócz szczególnych przypadków, kąty θ_4 i φ_4 zależą w sposób skomplikowany od mierzonego stanu. Wybór bazy w przypadku uzyskania innych wyników można przetransformować z zamieszczonych wzorów przez proste symetrie.

Co warto dodać — możliwy jest również leniwy wariant tej wersji — tj. ustalamy na sztywno bazę pomiaru i zakładamy, że wyjdą najbardziej prawdopodobne wersje. W tym przypadku z prawdopodobieństwem co najmniej $1/8$ otrzymujemy poprawny wynik, z pozostałym - nic. Efektywność takiej strategii nie jest dobra — daje $1/8$ bitu informacji na pomiar, co jest zawsze mniej niż optymalny pomiar (4.17) (praktycznie z definicji).

4.4.2. Pomiar stanu trójfotonowego

Przynajmniej w teorii, stan trójfotonowy ρ_3 niesie pełną informację kwantową. Teoretycznie można skonstruować oddziaływanie, dzięki któremu będzie dało się zmierzyć ów stan w dowolnej bazie. W praktyce jego pomiar jest znacznie trudniejszy — w pomiarze lokalnym do dyspozycji mamy zawsze mniej informacji niż w przypadku mierzenia analogicznego stanu czterofotonowego (to tak jakbyśmy mierzyli stan czterofotonowy, ale nie sprawdzali wyniku z jednego kanału). Jako skutek takiego utrudnienia:

- Mając do dyspozycji pomiar lokalny nie jesteśmy w stanie odróżnić jednoznacznie żadnych stanów, nawet wyszczególnionych par $\{|\psi_i\rangle, |\psi_{i\perp}\rangle\}$ (wykazałem numerycznie).
- Pomiar przy pomocy lokalnych operacji i komunikacji klasycznej (LOCC) nie jest w stanie odróżnić jednoznacznie par stanów (wykazałem numerycznie).
- Zawsze informacja wzajemna jest mniejsza niż dla analogicznego pomiaru stanu czterofotonowego.

By lepiej wiedzieć z czym mamy do czynienia, zmierzmy stan pierwszego z pozostałych fotonów. Wybór bazy nie gra roli — nasz stan jest odporny na kolektywną dekoherencję, a zatem i na wybór bazy pierwszego pomiaru. Gdy pierwszy foton okaże się mieć polaryzację poziomą, czyli

$|\leftrightarrow\rangle$, macierz gęstości pozostałych dwóch fotonów to

$$\begin{aligned} \rho_{2\leftrightarrow} &= \frac{1}{\text{Tr}(\langle\leftrightarrow_1|\rho_3|\leftrightarrow_1\rangle)} \langle\leftrightarrow_1|\rho_3|\leftrightarrow_1\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{6} - \frac{\alpha^*\beta + \alpha\beta^*}{2\sqrt{3}} & -\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{6} + \frac{\alpha^*\beta - \alpha\beta^*}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{6} + \frac{\alpha^*\beta - \alpha\beta^*}{2\sqrt{3}} & \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{6} + \frac{\alpha^*\beta + \alpha\beta^*}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2|\beta|^2}{3} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdzie baza macierzy gęstości $\rho_{2\leftrightarrow}$ to $|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$, $|\leftrightarrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\leftrightarrow\rangle$ i $|\uparrow\uparrow\rangle$. Gdybyśmy zmierzylili stan pierwszego fotonu $|\uparrow\rangle$, macierz $\rho_{2\uparrow}$ wyglądała by analogicznie do (4.25),

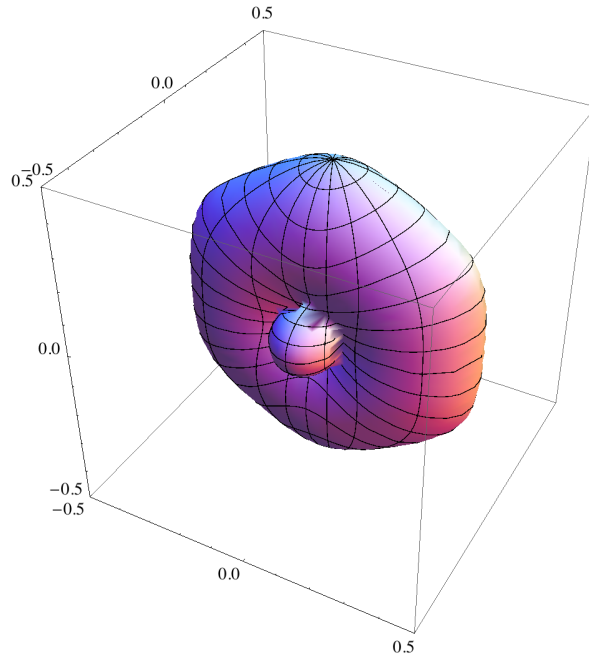
$$\rho_{2\uparrow} = (i\sigma_x)^{\otimes 2} \rho_{2\leftrightarrow} (-i\sigma_x)^{\otimes 2}. \quad (4.26)$$

Przejdźmy do maksymalizacji informacji wzajemnej w sytuacji rozróżniania dwóch zadanych ortogonalnych stanów. Wyniki numeryczne zostały pokazane na rys. 4.4. Z kolei na rys. 4.5 przedstawiono ustawienia dobre do tomografii kwantowej. Należy podkreślić, że dla stanu trójfotonowego informacja wzajemna między dowolnym stanem a wynikiem pomiaru zależy już od wyboru bazy. Niestety, nie jest możliwe ustawienie jednej bazy, która by pozwalała na wykonanie pełnej tomografii.

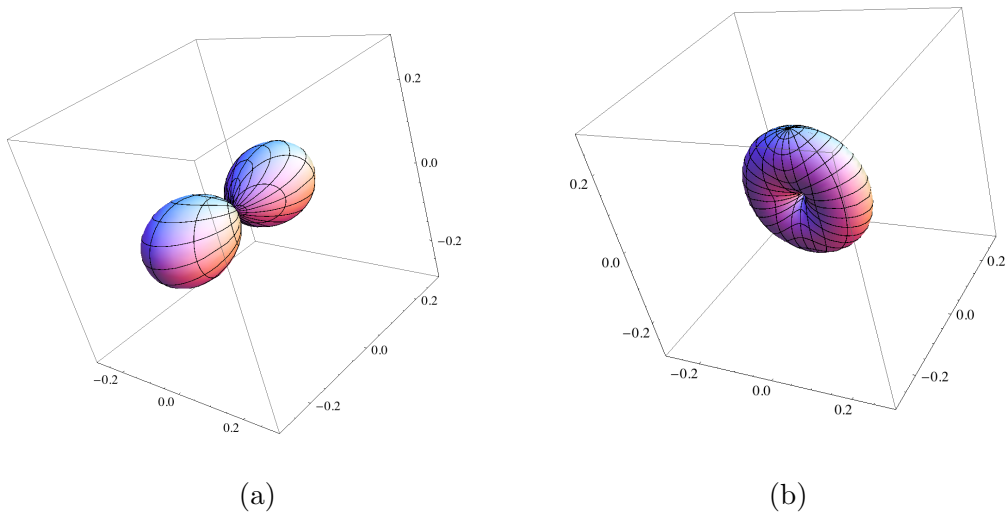
4.5. Zastosowania

Warto krótko wspomnieć o możliwych zastosowaniach wymienionych stanów 4- i 3-fotonowych. Jednym z nich jest przesyłanie informacji kwantowej. Przynajmniej w teorii, można zamieniać qubit logiczny zakodowany w omawianym stanie na zwykły qubit. Co więcej, można prowadzić obliczenia kwantowe na samych stanach z przestrzeni odpornej na dekoherencję [17, 18]. Należy jednak podkreślić, iż wymagają one więcej bramek kwantowych do przeprowadzenia tych samych operacji.

Innym zastosowaniem jest kryptografia. Przykładowy protokół [9] korzysta z faktu, że dla stanów paroseparowalnych $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ (a także ich trójfotonowych odpowiedników) można kodować klucz w wybranej parze stanów. Informacja jest przesyłana wyłącznie, gdy Alicja i Bob w danej próbie wybiorą tę samą parę stanów. Jako, że wymienione stany nie są ortogonalne, nawet w przypadku doboru tej samej bazy tylko część prób zostanie zwieńczona sukcesem.



Rysunek 4.4: Wykres numerycznie znalezionej maksymalnej informacji wzajemnej dla danej pary stanów trójfotonowych. Zwróć uwagę, że nigdy nie osiąga ona 1, zatem nigdy nie jest możliwy jednoznaczny pomiar. Wykres analogiczny do rys. 4.2.



Rysunek 4.5: Informacja wzajemna dla różnych stanów trójfotonowych i ustalonej bazy pomiarowej. (a) Baza wzajemnie nieobciążona ($\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi/2$) — pomiar tylko jednej współrzędnej sfery Blocha. (b) Baza polaryzacji liniowych z symetrią obrotową ($\theta_2 = 2\pi/3$, $\theta_3 = 4\pi/3$, $\varphi_3 = 0$) — pomiar dwóch współrzędnych sfery Blocha. Oznaczenia jak w rys. 4.2(b).

Rozdział 5

Uśrednianie po $SU(2)^{\otimes n}$

Jeśli chcemy doświadczalnie badać własności stanów odpornych na kolektywną dekoherencję, warto móc ją zasymulować. W znanych autorowi eksperymentach, owa symulacja odbywała się naiwnie — przez losowe wyginanie światłowodu [19] lub zastosowanie takiej samej, ustalonej transformacji unitarnej dla wszystkich fotonów [14]. W niniejszej pracy rozważymy operacje dające dla zadanej liczby fotonów ściśle uśrednienie po grupie $SU(2)^{\otimes n}$.

Przejście stanu zadanego macierzą gęstości ρ przez kanał podlegający silnej kolektywnej dekoherencji jest dane przez (2.2)

$$\mathcal{C}[\rho] = \int_{SU(2)} U^{\otimes n} \rho U^{\dagger \otimes n} dU, \quad (5.1)$$

gdzie dla parametryzacji

$$U = \begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi \exp(i\phi) \\ \sin \theta \sin \psi \exp(-i\phi) & \cos \theta + i \sin \theta \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

miara Haara to

$$dU = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \theta \sin \psi d\theta d\psi d\phi, \quad (5.3)$$

zaś granice całkowania to $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \psi < \pi$ i $0 \leq \phi < 2\pi$. Taka operacja jest nazywana wirowaniem (ang. twirling).

Narzucającym się sposobem symulacji owego uśrednienia jest możliwie gęste próbkowanie transformacji (5.1). Taka metoda nie jest ani ścisła, ani wygodna. Za to dla zadanej liczby fotonów, możemy tak sprytnie próbować grupę $SU(2)$, by wynik uśrednienia był ścisły. Działa to do pewnego stopnia analogicznie jak kwadratura Gaussa (całkowanie numeryczne biorące skończenie wiele próbek, które daje ścisły wynik dla wielomianów do danego stopnia). Z punktu widzenia geometrii

naturalne wydaje się rozważenie sumowania skończenie wielu elementów $SU(2)$, czym się zajmę w podrozdziale 5.1. Na stole laboratoryjnym wygodniej jest jednak zestawić obracające się płytki falowe, niż przełączać między szeregiem stanów. Analiza uśrednienia przy pomocy obracających się płytek falowych jest w podrozdziale 5.2.

Nim jednak przejdę do dalszej części, sprowadzę uśrednianie po $SU(2)^{\otimes n}$ do prostszego problemu. Zamiast badać jak działa wirowanie macierzy gęstości (5.1) wystarczy [20, 21] zbadać momenty odpowiadających elementów macierzy ortogonalnej

$${}^n\mathbf{A} = \int_{SU(2)} O^{\otimes n} dU, \quad (5.4)$$

gdzie O jest macierzą kanonicznie odpowiadającą U ,

$$SU(2) \ni U(\theta, \psi, \phi) \mapsto O(\theta, \psi, \phi) \in SO(3). \quad (5.5)$$

Taka zamiana problemu jest możliwa, gdyż każdą n -fotonową macierz gęstości można przedstawić w następującej postaci

$$\rho_n = \sum_{i_1 \dots i_n \in \{Id, x, y, z\}} T_{i_1, \dots, i_n} \sigma_{i_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}, \quad (5.6)$$

gdzie T_{i_1, \dots, i_n} to n -wymiarowa tabela liczb rzeczywistych. Należy podkreślić, że gdy interesuje nas uśrednienie dla n fotonów, należy otrzymać zgodność wszystkich momentów (5.4) dla wymiarów od 1 do n .

Tensory pierwszych czterech momentów to

$$\begin{aligned} {}^1A_{i p} &= 0 \\ {}^2A_{ij pq} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \\ {}^3A_{ijk pqr} &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \\ {}^4A_{ijkl pqrst} &= \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{dla indeksów typu } \circ \circ \circ \circ \star \star \star \star, \\ \frac{1}{15} & \text{dla indeksów typu } \circ \circ \circ \circ \star \star \diamond \diamond \text{ i } \star \star \diamond \diamond \circ \circ \circ \circ \text{ oraz permutacji, } \star \neq \diamond, \\ \frac{2}{15} & \text{dla indeksów typu } \circ \circ \star \star \diamond \diamond \bullet \bullet \text{ oraz permutacji, } \circ \neq \star, \diamond \neq \bullet, \\ -\frac{1}{30} & \text{dla indeksów typu } \circ \circ \star \star \diamond \diamond \bullet \bullet \text{ oraz permutacji, } \circ \neq \star, \diamond \neq \bullet, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie przez permutację rozumiem tu taką samą zamianę kolejności indeksów $ijkl$ i $pqrst$.

5.1. Dyskretne

Jeden ze sposobów przeprowadzenia wirowania (ang. twirling) (5.1) jest dyskretne próbkowanie,

$$\mathcal{C}[\rho] = \sum p_i U_i^{\otimes n} \rho U_i^{\dagger \otimes n}, \quad (5.8)$$

gdzie $U_i \in SU(2)$ a p_i to odpowiednie prawdopodobieństwa ($\sum_i p_i = 1$).

Zbiór par $\{(p_i, U_i)\}$ spełniających (5.8) jest nazywany unitarnym t-obrysem (ang. unitary t-design) [22, 23]. Szukanie dyskretnego próbkowania odpowiadającego uśrednieniu po całej grupie $SU(2)$ ma pewien związek z próbkowaniem sfery Blocha, czyli tzw. t-obrysem (ang. t-design).

Próbkowanie działające dla danej liczby fotonów działa też dla mniejszej liczby (można rozważyć dołożenie dodatkowych i zapomnienie o nich). Zamiast rozwijać teorię, skupię się na jawnym podaniu wyników. W kontekście niniejszej pracy najistotniejsze jest $n = 3$ i $n = 4$, niemniej pokażę wyniki dla $n \in \{2, 3, 5\}$.

W ogólności prawdopodobieństwa mogą być różne i zbiór $G = \{U_i\}$ nie musi mieć żadnej struktury. My zajmiemy się szczególnym przypadkiem, w którym prawdopodobieństwa są równe (tj. $p_i = 1/\#G$) a G jest grupą. Okazuje się [24], że odpowiednie podgrupy $SO(3)$ będące unitarnymi n -obrysami to:

- Dla $n = 1$ jest to tzw. czwórka Kleina (4 elementy: identyczność i 3 obroty o kąt π wokół ortogonalnych osi).
- Dla $n = 2$ jest to grupa obrotów czworościanu (12 elementów).
- Dla $n = 3$ jest to grupa obrotów sześcianu, a zarazem ośmiościanu (24 elementów).
- Dla $n = 5$ jest to grupa obrotów dwunastościanu, a zarazem dwudziestościanu (60 elementów).

5.2. Ciągłe

W doświadczeniu zmienianie pomiędzy kilkoma stanami może być niewygodne. Dużo przyjemniejszy schemat wydaje się następujący: ustawiamy szeregowo kilka płytek falowych, każdą z nich obracamy jednostajnie ze stałą prędkością kątową. Prędkości są współmierne, tak by po skończonym czasie uzyskać pełne uśrednienie:

$$\mathcal{C}[\rho] = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} U^{\otimes n}(t) \rho U^{\otimes n \dagger}(t), \quad (5.9)$$

gdzie

$$U(t) = \prod_i R(\varphi_i, \omega_i t). \quad (5.10)$$

Uwaga, $U(t)$ nie jest jednoparametrową grupą!

Płytkę falową, przesuającą fazę jednej polaryzacji o φ , możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned} R(\varphi, t) &= \exp(-it\sigma_y/2) \exp(i\varphi\sigma_x/2) \exp(it\sigma_y/2) \\ &= \cos(\varphi/2) - i \sin(\varphi/2) (\cos(t)\sigma_z - \sin(t)\sigma_x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Najpowszechniejszymi w laboratorium są ćwierć- i półfalówki, niemniej, do naszych celów będą potrzebne również inne płytki falowe.

Dla $n = 1$ uśrednienie realizowane jest dla płytek (i prędkości obrotów):

$$U(t) = R(\pi, t)R(\pi/2, -t) \quad (5.12)$$

Dla $n = 2$ uśrednienie realizowane jest dla płytek (i prędkości obrotów):

$$U(t) = R(\pi, 3t)R(\pi/2, -t)R(\varphi_0, t), \quad (5.13)$$

gdzie $\varphi_0 = \arccos(3^{-1/2}) \approx 0.9553 \approx 54.7^\circ$ jest połową kąta czworościanu.

W przypadku istnienia dodatkowych symetrii, np. gdy chcemy uśrednić stan krzyżowo ułożonych polaryzacji po całej sferze Blocha, sprawa się upraszcza [25]. Powyższe zestawy płytek, wraz z prędkościami kołowymi, zostały niejako zgadnięte. Pomocnym narzędziem w zgadywaniu jest liczenie odpowiednich momentów macierzy obrotów (5.4). Odpowiednio sparametryzowałem obroty (czyniąc dodatkowe założenia), policzyłem momenty w programie *Wolfram Mathematica 7* i przyrównałem je do pożądaných momentów (5.7). Podejrzewam, że dla $n \leq 5$ istnieją odpowiednie ciągłe próbkowania, a opóźnienia fazowe płytek mają coś wspólnego z kątami w bryłach platońskich. Niestety, obecnie nie dysponuję regułą, która umożliwiałaby systematyczne znalezienie odpowiednich ciągłych próbkowań realizujących uśrednienie po $SU(2)^{\otimes n}$.

Rozdział 6

Podsumowanie

W niniejszej pracy magisterskiej zająłem się stanami kwantowymi składającymi się z n fotonów, które są odporne działanie kolektywnej dekoherencji, polegającej na takim samym obrocie polaryzacji każdego z fotonów. Wprowadziłem podstawowe pojęcia i powszechnie znane rezultaty, w szczególności analizę podprzestrzeni nierozspójnianej (ang. Decoherence-Free Subspace) i podukładów bezszumowych (ang. Noiseless Subsystems). Pokazałem co już wiadomo o czterofotonowej podprzestrzeni nierozspójnianej oraz niektóre rezultaty z symulacji kolektywnej dekoherencji.

W pracy przedstawiłem nowe rezultaty, których nie spotkałem w obecnej literaturze. Zaproponowałem diagramy ułatwiające liczenie iloczynów skalarnych pewnych szczególnych stanów podprzestrzeni singletowej złożonej z qubitów. Pokazałem, że jeśli zakodujemy informację kwantową w podprzestrzeni singletowej, nie tylko jest ona odporna na kolektywną dekoherencję, ale też strata pojedynczego fotonu jej nie niszczy. Ta obserwacja ma ważne znaczenie w przypadku przesyłania informacji przez światłowód — rozwiązuje ona zarówno problem losowego obrotu polaryzacji, jak i niewielkich strat. Przeanalizowałem rozróżnialność ortogonalnych stanów, gdy ograniczamy się do mierzenia polaryzacji każdego ze składowych fotonów osobno, zarówno dla czterofotonowej podprzestrzeni nierozspójnianej, jak i trójfotonowego podukładu bezszumowego. Dodatkowo, otrzymałem nowy i praktyczny doświadczalnie sposób symulacji kolektywnej dekoherencji, przez włożenie we wiązkę obracających się ze stałymi prędkościami kołowymi płytek fazowych.

Natknąłem się na szereg problemów, które pozostały nierozwiązane. Być może nie są to trudne pytania, a mój brak odpowiedzi wynika wyłącznie ze skupienia się na innych obszarach badawczych. Są to m.in.:

- Czy każda baza podprzestrzeni singletowej składająca się ze stanów paroseparowalnych musi mieć postać bazy nie przecinających się cięciw (z dokładnością do permutacji)?
- Czy istnieje prosta ogólna konstrukcja bazy ortogonalnej dla podprzestrzeni singletowej?

- Czy można tak skonstruować podukład bezszumowy, by strata pojedynczego fotonu nie niszczyła niesionej informacji?
- Jak uogólnienie schematu pomiarów, z lokalnych do wszystkich korzystających z optyki pasywnej [26], pomaga w rozróżnialności omawianych stanów cztero- i trójfotonowych?
- Czy i jak można skonstruować zestawy obracających się płytek falowych, by ściśle symulowały uśrednianie po $SU(2)^{\otimes n}$ dla $n = 3, 4, 5$?

Jak widać, niniejszy temat jest tętniący życiem i czeka na kolejne postępy.

Podziękowania

Praca powstała ze środków Fundacji Nauki Polskiej w ramach projektu TEAM na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Chciałbym podziękować doktorom Wojtkowi Wasilewskiemu i Rafałowi Demkowiczowi-Dobrzańskiemu za liczne owocne rozmowy. Jestem wdzięczny prof. Czesławowi Radzewiczowi za wartościową opiekę od początku moich studiów w ramach Kolegium Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych. I najważniejsze — dziękuję promotorowi dr. hab. Konradowi Banaszkowi za zaproponowanie ciekawego tematu, liczne i cenne uwagi oraz cierpliwość.

Dodatek A

Clebsch-Gordan i liczenie ścieżek

W niniejszym dodatku znajduje się elementarne wyprowadzenie rozkładu Clebscha-Gordana dla n rozróżnialnych cząstek o spinie $\frac{1}{2}$.

Algebra reprezentacji spinowych jest następująca

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{1/2}) &= \mathcal{H}_{1/2} \\ (\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_{1/2}) &= \mathcal{H}_{s-1/2} \oplus \mathcal{H}_{s+1/2} \quad \text{dla } s > 0,\end{aligned}\tag{A.1}$$

pamiętając, że suma prosta \oplus i iloczyn tensorowy \otimes zachowują się jak zwykle dodawanie i mnożenie (w sensie łączności, przemienności i rozdzielności). Z fizycznego punktu widzenia sprawa wygląda następująco: gdy do stanu o spinie różnym od zera dołożymy spin $\frac{1}{2}$, może od ustawić się równoległe albo antyrównoległe (odpowiednio, zwiększając lub zmniejszając sumaryczny maksymalny rzut spinu).

Jeśli chcemy dowiedzieć się na ile sposobów możemy uzyskać podprzestrzeń o spinie s wystarczy policzyć różne ścieżki od punktu $(0, 0)$ do punktu (n, s) , takie, że dla współrzędnej które nie schodzą poniżej zera i których odcinki mają postać $(1, +1/2)$ i $(1, -1/2)$. W celu policzenia wystarczy skorzystać z tzw. lematu o odbiciu [27] by otrzymać

$$C_{n/2, s} = \frac{2s+1}{n/2+s+1} \binom{n}{n/2+s},\tag{A.2}$$

którego numeryczne wartości są zaprezentowane w tab. A.1.

$n \setminus s$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7
0	1														
1		1													
2	1		1												
3		2		1											
4	2		3		1										
5		5		4		1									
6	5		9		5		1								
7		14		14		6		1							
8	14		28		20		7		1						
9		42		48		27		8		1					
10	42		90		75		35		9		1				
11		132		165		110		44		10		1			
12	132		297		275		154		54		11		1		
13		429		572		429		208		65		12		1	
14	429		1001		1001		637		273		77		13		1

Tabela A.1: Krotności reprezentacji spinu s w przestrzeni produktowej n qubitów — $C_{n/2,s}$ (A.2).
Brak wpisu oznacza zero.

Bibliografia

- [1] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden. Quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):145–195, 2002. [arXiv:quant-ph/0101098](#), [doi:10.1103/RevModPhys.74.145](#).
- [2] P. Zanardi, M. Rasetti. Noiseless Quantum Codes. *Physical Review Letters*, 79(17):3306, 1997. [arXiv:quant-ph/9705044](#), [doi:10.1103/PhysRevLett.79.3306](#).
- [3] D. Bacon. *Decoherence, Control, and Symmetry in Quantum Computers*. Rozprawa doktorska, University of California, Berkeley, 2003. [arXiv:quant-ph/0305025](#).
- [4] D. A. Lidar, K. B. Whaley. *Decoherence-Free Subspaces and Subsystems*, 83–120. Springer, Berlin, 2003. [arXiv:quant-ph/0301032](#).
- [5] J. L. Ball, K. Banaszek. Decoherence-Free Subspaces and Subsystems for a Collectively Depolarizing Bosonic Channel. *Open Systems & Information Dynamics*, 12(2):121–131, 2005. [arXiv:quant-ph/0506020](#), [doi:10.1007/s11080-005-5723-1](#).
- [6] D. W. Lyons, S. N. Walck. Multiparty quantum states stabilized by the diagonal subgroup of the local unitary group. *Physical Review A*, 78(4):042314, 2008. [arXiv:0808.2989](#), [doi:10.1103/PhysRevA.78.042314](#).
- [7] H. S. Wilf. *Generatingfunctionology*. AK Peters Ltd, 2006. <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>.
- [8] A. Cabello. Six-qubit permutation-based decoherence-free orthogonal basis. *Physical Review A*, 75(2):020301, 2007. [arXiv:quant-ph/0702118](#), [doi:10.1103/PhysRevA.75.020301](#).
- [9] J.-C. Boileau, D. Gottesman, R. Laflamme, D. Poulin, R. W. Spekkens. Robust Polarization-Based Quantum Key Distribution over a Collective-Noise Channel. *Physical Review Letters*, 92(1):017901, 2004. [arXiv:quant-ph/0306199](#), [doi:10.1103/PhysRevLett.92.017901](#).
- [10] W. Wasilewski. *Źródła fotonów w łączności kwantowej*. Rozprawa doktorska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2007. <http://famo.fizyka.umk.pl/publikacje/wasilewski.pdf>.

- [11] P. Migdał, W. Wasilewski. Noise reduction in 3D noncollinear parametric amplifier. *Applied Physics B*, 99(4):657–671, 2010. arXiv:0908.2207, doi:10.1007/s00340-010-3915-z.
- [12] Y.-X. Gong, X.-B. Zou, X.-L. Niu, J. Li, Y.-F. Huang, G.-C. Guo. Generation of arbitrary four-photon polarization-entangled decoherence-free states. *Physical Review A*, 77(4):042317, 2008. doi:10.1103/PhysRevA.77.042317.
- [13] H. Weinfurter, M. Żukowski. Four-photon entanglement from down-conversion. *Physical Review A*, 64(1):5, 2001. arXiv:quant-ph/0103049, doi:10.1103/PhysRevA.64.010102.
- [14] M. Bourennane, M. Eibl, S. Gaertner, C. Kurtsiefer, A. Cabello, H. Weinfurter. Decoherence-Free Quantum Information Processing with Four-Photon Entangled States. *Physical Review Letters*, 92(10):4, 2004. arXiv:quant-ph/0309041, doi:10.1103/PhysRevLett.92.107901.
- [15] K. Banaszek. Information Gain versus State Disturbance for a Single Qubit. *Open Systems and Information Dynamics*, 13(1):1–16, 2006. arXiv:quant-ph/0006062, doi:10.1007/s11080-006-7263-8.
- [16] J. Walgate, A. J. Short, L. Hardy, V. Vedral. Local Distinguishability of Multipartite Orthogonal Quantum States. *Physical Review Letters*, 85(23):4972–4975, 2000. arXiv:quant-ph/0007098v1, doi:10.1103/PhysRevLett.85.4972.
- [17] D. Bacon, J. Kempe, D. A. Lidar, K. B. Whaley. Universal Fault-Tolerant Quantum Computation on Decoherence-Free Subspaces. *Physical Review Letters*, 85(8):1758, 2000. arXiv:quant-ph/9909058, doi:10.1103/PhysRevLett.85.1758.
- [18] L.-A. Wu, P. Zanardi, D. A. Lidar. Holonomic Quantum Computation in Decoherence-Free Subspaces. *Physical Review Letters*, 95(13):130501, 2005. arXiv:quant-ph/0506086, doi:10.1103/PhysRevLett.95.130501.
- [19] K. Banaszek, A. Dragan, W. Wasilewski, C. Radzewicz. Experimental Demonstration of Entanglement-Enhanced Classical Communication over a Quantum Channel with Correlated Noise. *Physical Review Letters*, 92(25):4, 2004. arXiv:quant-ph/0403024, doi:10.1103/PhysRevLett.92.257901.
- [20] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki. Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition. *Physics Letters A*, 200(5):340–344, 1995. doi:10.1016/0375-9601(95)00214-N.
- [21] R. Horodecki, M. Horodecki. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Physical Review A*, 54(3):1838–1843, 1996. arXiv:quant-ph/9607007, doi:10.1103/PhysRevA.54.1838.

- [22] D. Gross, K. Audenaert, J. Eisert. Evenly distributed unitaries: On the structure of unitary designs. *Journal of Mathematical Physics*, 48(5):052104, 2007. arXiv:quant-ph/0611002, doi:10.1063/1.2716992.
- [23] A. Roy, A. J. Scott. Unitary designs and codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 53(1):13–31, 2009. arXiv:0809.3813, doi:10.1007/s10623-009-9290-2.
- [24] M. Graf, D. Potts. Sampling Sets and Quadrature Formulae on the Rotation Group. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 30(7):665–688, 2009. doi:10.1080/01630560903163508.
- [25] K. Banaszek, R. Demkowicz-Dobrzański, M. Karpiński, P. Migdał, C. Radzewicz. Quantum and semiclassical polarization correlations. *Optics Communications*, 283(5):713–718, 2010. arXiv:0908.3548, doi:10.1016/j.optcom.2009.10.061.
- [26] P. van Loock, N. Lütkenhaus. Simple criteria for the implementation of projective measurements with linear optics. *Physical Review A*, 69(1), 2004. arXiv:quant-ph/0304057, doi:10.1103/PhysRevA.69.012302.
- [27] R. Sztencel. Lemat o głosowaniu – zasada odbicia. *Delta – popularnonaukowy miesięcznik*, (5):25, 2008. <http://www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0508/lemat.pdf>.