

Tomografia laserowa — „suwmiarka świetlna”

Radosław Chrapkiewicz, Piotr Migdał

13 września 2006

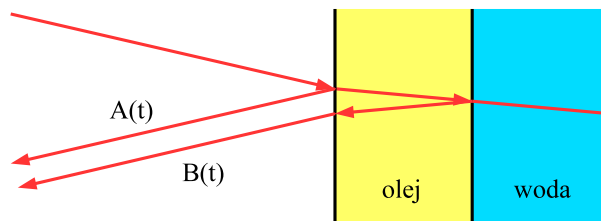
1 Interferencja — słów i wzorów kilka

1.1 Dwie warstwy

Mamy przezroczyste ciało składające się z równoległych warstw o różnych parametrach, chcemy wyznaczyć położenie poszczególnych granic między warstwami. Jak to zrobić?

Rozważmy najpierw przypadek jednorodnej warstwy — wystarczy zmierzyć jej długości. W przypadku „sensownych” wartości (dajmy na to, 1 cm grubości), możemy sięgnąć po suwmiarkę, a pomiar jest nie dość, że szybki, to w miarę dokładny. Jednak precyzja klasycznych narzędzi (łącznie ze śrubą mikrometryczną) może okazać się niezadowalająca, gdy mamy do czynienia z czymś cieńszym. W dodatku, w przypadku takich mechanicznych urządzeń, wymagany jest dostęp do obu stron płytki, a sam dotyk zniszczy powierzchnię. Przykład cienkiego, z jednostronnym dostępem i miękką powierzchnią? Warstwa oleju na wodzie.

Bystry Czytelnik, po spojrzeniu na tytuł artykułu, zapewne spodziewa jakiegoś sposobu mierzenia grubości z użyciem światła. Jednak zanim taki przedstawimy, przyjrzymy się najpierw jednemu pięknemu zjawisku, którego zrozumienie pomoże nam w szukaniu i zrozumieniu metody mierzenia. Po rozlaniu kropli oleju na kałuży widzimy charakterystyczne opalizujące kolory. Te tęcze barwy biorą się z interferencji światła odbitego od dwóch granic ośrodków.



Rysunek 1: Wiązka światła odbijająca się od plamy oleju na wodzie. Promienie odbite od granicy powietrze-olej i olej-woda interferują ze sobą.

Światło jest w części odbijane zarówno przez granicę powietrze-olej, jak i olej-woda. Obie te wiązki interferują ze sobą. Jak na rysunku 1, amplitudy odbitych wiązek to $A(t)$ i $B(t)$. Drogę optyczną światła przechodzącego tam i z powrotem przez olej oznaczmy jako $2L$ (światło na przebycie jej poświęca $\frac{2L}{c}$ sekund), a częstość fali to ω . Amplituda wypadkowa jest niczym innym jak sumą $A(t)$ i $B(t)$, zatem

$$\begin{aligned} A(t) + B(t) &= a \cos(\omega t) + b \cos(\omega(t + \frac{2L}{c})) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\frac{2L}{c}\omega)} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie a to amplituda odbicia od powietrze-olej, b — olej-woda¹, a φ to pewien kąt (biorący się ze wzoru na dodawanie *kosinusów*, ale którego wartość szczególnie nas nie interesuje).

Samej amplitudy nie widzimy, ale za to możemy zobaczyć natężenie wiązki światła. Jest ono proporcjonalne do kwadratu amplitudy uśrednianej po czasie. To natężenie przedstawimy jako funkcję od częstości, $I_{odb}(\omega)$. W wyrażeniu $(A(t) + B(t))^2$ jedynym wyrazem zależnym od czasu jest $\cos^2(\omega t + \varphi)$, który uśrednia się do

¹ściślej — b to iloczyn amplitud: przejścia przez powietrze-olej, odbicia od olej-woda i przejścia przez olej-powietrze

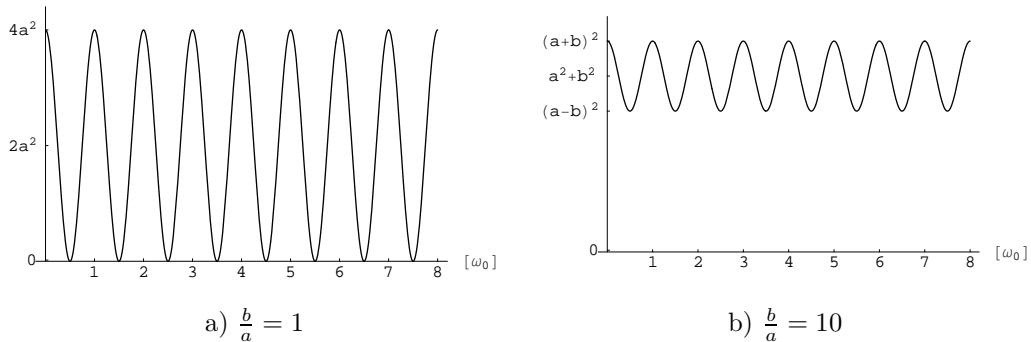
$\frac{1}{2}$. W efekcie dostajemy

$$I_{odb}(\omega) \sim a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(\frac{2L}{c}\omega\right). \quad (1)$$

A zatem natężenie ma postać *kosinusa* plus jakiejś części stałej. Nietrudno zauważyć, że (1) jest funkcją okresową, czyli zachodzi $I_{odb}(\omega + \omega_0) = I_{odb}(\omega)$ dla każdego ω i pewnego ω_0 . Taką okresowość spowodowaną obecnością *kosinusa* we wzorze na funkcje odbicia będziemy odtąd nazywali modulacją. Ogólnie modulacją będzie dla nas przemnożenie dowolnej sumy wyrazów typu *kosinus* przez funkcję o pewnej szerokości, a jej „głębokością” będzie amplituda tych *kosinusów*. Z elementarnych własności *kosinusa* wynika, że

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{2L} = \frac{\pi c}{L}. \quad (2)$$

Po odbiciu wiązki od siatki dyfrakcyjnej dyfrakcyjnej, można badać zależność natężenia od częstości fali. Obserwujemy wygaszenia, dla $\omega = (n + \frac{1}{2})\omega_0$, a wzmocnienia dla $\omega = n\omega_0$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.



Rysunek 2: Natężenie odbijanego światła w funkcji częstości. Warto zwrócić uwagę na to, że głębokość modulacji jest największa, gdy $a = b$.

Otrzymaliśmy zatem zależność współczynnika odbicia od częstości padającej fali. W rzeczywistości źródło, którym oświetlamy próbkę, ma pewne widmo i składa się z fal światła o różnych częstościach. Mierzone natężenie będzie iloczynem natężenia padającego światła i wcześniej wyliczonej funkcji odbicia $I_{odb}(\omega)$.

$$\begin{aligned} I(\omega) &= I_0(\omega)I_{odb}(\omega) \\ &= I_0(\omega) (a^2 + b^2 + 2ab \cos(\frac{2L}{c}\omega)) \end{aligned} \quad (3)$$



Rysunek 3: Zależność odbijanego natężenia od częstości z uwzględnieniem rzeczywistego widma padającego światła $I_0(\omega)$ (górze). Na widmie odbitym od dwóch warstw (dół) widać modulację.

Gdy mamy do czynienia z funkcją natężenia taką jak na rysunkach 3 (dół), okres modulacji $I_{odb}(\omega)$ (w którym jest zakodowana grubość warstwy odbijającej) możemy wyliczyć mierząc odległość między kolejnymi lokalnymi minimami.

Czy znaczy to, że zawsze potrafimy odcyfrować okres ω_0 ? Z punktu matematycznego — tak, inżynierskiego — niekoniecznie. Zwróćmy uwagę, że żaden spektrometr, cyfrowy ani analogowy, nie potrafi mierzyć dowolnie małych natężeń. Niemniej, widmo $I_0(\omega)$ na ogół ma pewną szerokość. Oznaczmy przez $\Delta\omega_I$ tzw. szerokość połówkową widma (czyli odległość między miejscami, w których natężenie osiąga połowę maksymalnej wartości) na rys. 3. Wprawdzie czasem możemy mierzyć natężenie na szerokości $2\Delta\omega_I$ czy też nawet $3\Delta\omega_I$, lecz dalej to pozostaje ten sam rząd wielkości „dostępnego” przedziału częstości.

Przyjmijmy, że okres $I_{odb}(\omega)$, którym jest pewne ω_0 , możemy zmierzyć, gdy nie jest dużo większy od szerokości $\Delta\omega_I$. Tym samym maksymalny dla nas mierzalny okres to $\omega_{\max} \approx \Delta\omega_I$. Wyrażając odległość przez częstość za pomocą wzoru (2) otrzymamy minimalną odległość

$$L_{\min} = \frac{\pi c}{\omega_{\max}} \approx \frac{\pi c}{\Delta\omega_I}. \quad (4)$$

Ta wyliczona wielkość L_{\min} jest związana z rozdzielczością — warstwy odległe od siebie o mniej niż L_{\min} zleją się w jedną. Dla żarówki emitującej światło z zakresu widzialnego (tj. od 400 nm do 800 nm) otrzymujemy wynik 400 nm, czyli 0,4 μm .

1.2 Więcej warstw

Co jednak gdy mamy do czynienia z większą liczbą warstw? Tutaj sprawa będzie bardziej skomplikowana. Okazuje się (czego nie będziemy pokazywać), że modulacja widma w tym przypadku pochodzi od interferencji każdej odbitej wiązki z każdą. Funkcja odbicia składa się z sumy składników postaci $a_j a_k \cos\left(\frac{2(L_j - L_k)}{c}\omega\right)$, gdzie indeksy j, k oznaczają numerację kolejnych warstw. a_i, a_j są tu amplitudami fal przychodzących od tych warstw, a L_i, L_j odległościami od arbitralnie przyjętego punktu. Łatwo sprawdzić, że taka zależność odpowiada wzorowi (3) w szczególnym przypadku dwóch wiązek. Pierwszy i drugi wyraz w (3) jest tu przemnożeniem amplitudy przez siebie, ostatni zawiera iloczyn obydwu amplitud i *kosinusa* z odległością między odpowiadającymi warstwami.

Co nas może niepokoić to fakt, że wraz z liniowo rosnącą liczbą warstw, liczba wyrazów w funkcji odbicia dla wielu warstw rośnie do kwadratu. Co gorsze, pojawiają się nam *kosinusy* o różnych okresach, proporcjonalnych do odwrotności różnicy odległości między każdą parą warstw. Modulacja widma $I(\omega)$ staje się bardzo skomplikowana, a co za tym idzie — jej analiza. Aby sobie uprościć życie, należy zastosować sztuczkę raczej inżynierską niż matematyczną. „Na siłę” dodajemy silną wiązkę odniesienia, o amplitudzie a_0 dużo większej niż amplituda każdej pojedynczej, odbitej fali a_j .

W tym przypadku składniki sumy zawierające iloczyny amplitud fal odbitych będą zaniedbywalne w porównaniu do wyrazów zawierających iloczyny amplitudy silnej wiązki i fali odbitej. Czytelnik zapewne domyśla się, że taka wiązka musi być skorelowana z wiązkami odbitymi i też wyglądać jak odbita na pewnej głębokości L_0 . Załóżmy na razie, że tak jest a rozwiązanie techniczne tego problemu przedstawimy dalej.

Funkcja odbicia przy wcześniejszym założeniu $a_0 \gg a_j$ i dodatkowo przyjmując $L_0 = 0$, będzie miała postać:

$$I(\omega) = I_0(\omega)I_{odb}(\omega) = I_0(\omega) \left(a_0^2 + 2a_0 \sum_{j \neq 0} a_j \cos\left(\frac{2L_j}{c}\omega\right) \right). \quad (5)$$

Dzięki takiemu podejściu mamy funkcje odbicia bez wyrazów mieszanych, składającą się tylko z prostych wyrazów postaci iloczynu amplitudy i *kosinusa* głębokości warstwy.

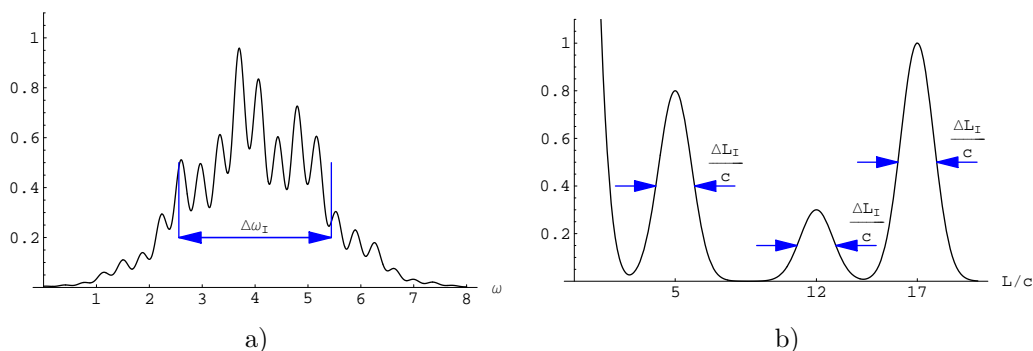
1.3 Odzyskiwanie L -ów

Pozostało już tylko dotrzeć do współczynników a_j oraz głębokości L_j z nimi związanych. W naszym pierwszym przypadku, w którym analizowaliśmy tylko dwie wiązki, sprawa była dość prosta — problem ograniczał się do znalezienia odległości między lokalnymi minimami oraz zmierzenia głębokości modulacji.

Co jednak zrobić, gdy tych wiązek jest kilka, kilkanaście, a może i więcej? Okazuje się, że problem nie jest trudny, jeśli się tylko posłużyć *transformatą Fouriera*. Jest to operacja która, mówiąc mało ściśle, daną funkcję rozkłada na wyrazy typu *sinus*, *kosinus*. W efekcie możemy otrzymać natężenie w funkcji częstotliwości poszczególnych wyrazów.

W naszym przypadku argumentem funkcji odbicia jest ω , zatem częstotliwością tej funkcji będzie $2L/c$. Stosując transformatę Fouriera do $I(\omega)$, spodziewamy się dostać duże wartości dla częstotliwości $2L_j/c$ odpowiadającym modulacjom od interferencji wiązki odniesienia z odbitą od warstwy j . Identyfikując na funkcji po transformacji piki, jesteśmy w stanie określić głębokość odpowiadającej mu warstwy oraz amplitudę fali. Nie będziemy tego udowadniać, ale kształt każdego z takiego piku będzie taki jaki jak widmo samego $I_0(\omega)$, a jego szerokość odwrotnie proporcjonalna do szerokości widma którym oświetlamy.

Na rysunku 4a) mamy przykład widma wiązki odbitej od kilku warstw. Transformata Fouriera daje nam reprezentację natężenie–częstość typu $(2L/c)$. Na rysunku 4b) możemy rozpoznać różne warstwy na głębokościach 5, 12, 17 z odpowiadającymi im amplitudami fal odbitych.



Rysunek 4: Za pomocą transformaty Fouriera można z widma a) odtworzyć położenia warstw odbijających b).

2 Układ doświadczalny

2.1 Źródło światła

Teoretycznie, naszym źródłem mogłoby być Słońce albo zwykła żarówka. Wprawdzie nałożone wymaganie szerokiego widma jest spełnione, ale to nie wszystko. W obu powyższych przypadkach by wiązka była spójna, trzeba ją przepuścić przez odpowiednio wąską szczelinę. W praktyce przekłada się to na ogromny spadek natężenia, co znacznie utrudniłoby pomiary.

Z kolei lasery (ciągle) emitują wiązkę spójną i skolimowaną (nie robiejącą się na boki), jednak przeszkodę stanowi monochromatyczność — gdy znamy wartość natężenia tylko dla jednej, konkretnej częstotliwości, nie wystarcza to nam do odtworzenia położenia warstw odbijających. Bardzo wąskie widmo daje nam bardzo szerokie piki na transformacji Fouriera, a co za tym idzie, brak możliwości rozróżnienia poszczególnych maksimum. Na szczęście istnieją jeszcze lasery impulsowe (w szczególności — femtosekundowe) — łączą one zalety laserów monochromatycznych (spójność i skolimowanie) z zaletami, niech nam będzie, żarówek (szerokie widmo). Dodatkowo, jak nazwa sugeruje, świecą (a raczej błyskają) impulsami. Pozwala to badać także ruchome przedmioty.

2.2 Pomiar widma

Najważniejszą rzeczą, jaką musimy zmierzyć, jest funkcja natężenia od częstotliwości: $I(\omega)$. W tym celu wystarczy puścić wiązkę na siatkę dyfrakcyjną, po czym zmierzyć moc promieniowania padającego na ekran w zależności od położenia. W rzeczywistości całą tę „czarną robotę” wykonuje za nas spektrometr cyfrowy, a napisane przez nas w programie LabVIEW procedury w czasie rzeczywistym liczą transformatę Fouriera z $I(\omega)$.

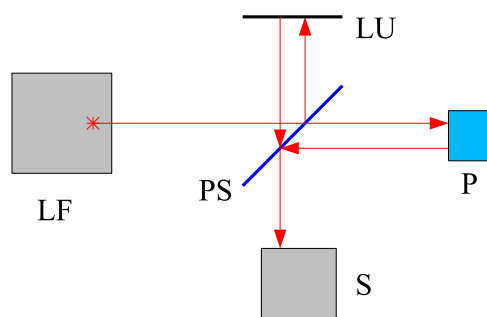
2.3 Wiązka odniesienia

Postulowaliśmy dodanie wiązki odniesienia. Jak jednak tego dokonać — nie możemy wstawić niczego przed, ani tym bardziej za naszym badanym układem. Równie chybiony wydaje się być pomysł pomalowania próbki

substancją odblaskową. Za to nic nie stoi jednak na przeszkodzie by rozdzielić wiązkę na dwie (za pomocą płytki światłodzielną) i jedną wiązkę puścić na próbkę, a drugą na lustro, po czym je połączyć. W zasadzie najprostszym rozwiązaniem jest tutaj użycie interferometru dwuramiennego zwanego także *interferometrem Michelsona-Morleya*.

2.4 I oto nasz układ!

Teraz już bez obaw możemy złożyć nasz cały układ.



Rysunek 5: Układ doświadczalny. LS - laser femtosekundowy (źródło światła), PS - płytki światłodzielną, P - próbka, LU - lustro, S - spektrometr.

Jak wynika z rysunku, wiązka wychodzi z lasera, po czym pada na płytkę światłodzielną. Dwie powstałe wiązki biegną w dwóch ramionach (jednym z próbką, drugim z lustrem) po czym zostają połączone. Taka końcowa wiązka pada na spektrometr i jest cyfrowo analizowana.

3 Wyniki

Używaliśmy lasera $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$ (opartego na kryształach szafiru domieszkowanego tytanem) o maksymalnej mocy na wyjściu ok. 300 mW, a widmie z przedziału częstości $3.0 - 3.8 \frac{1}{f_s}$. Jak można łatwo przeliczyć², daje to długość fali w zakresie 790 – 820 nm, a zatem kraniec pasma widzialnego — od strony czerwonej. Co nas może bardziej interesować, rozdzielczość (liczona ze wzoru (4)) to jedna warstwa na ok. 10 μm (czyli 100 „pikseli” na milimetr).

3.1 Szkiełko mikroskopowe

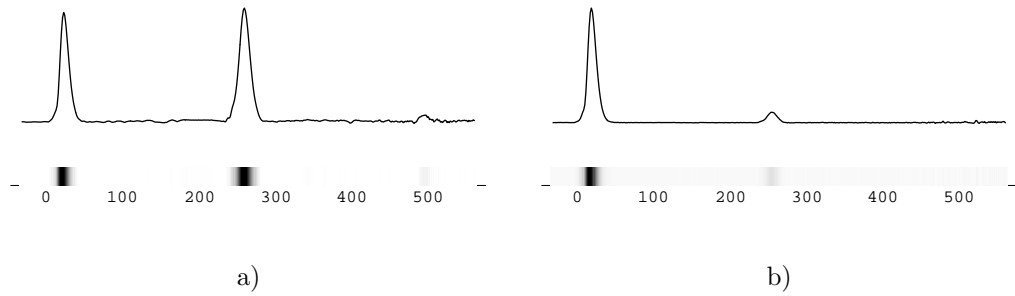
Jednym z najprostszych układów, jakie możemy badać jest cienka płytka szklana. Powinniśmy zaobserwować wiązki odbite od pierwszej granicy (powietrze-szkło) i drugiej (szkło-powietrze), obie o porównywalnym natężeniu. Być może będzie dało się też zobaczyć, dość słabe, wielokrotne odbicia.

Co by się jednak stało, gdyby tylną powierzchnię posmarować olejem o współczynniku załamania porównywalnym ze współczynnikiem załamania szkła? Na pewno odbicie od drugiej granicy (tym razem szkło-olej) stało by się dużo słabsze (nie mówiąc już o wielokrotnych odbiciach). Nie możemy zakładać, że „w rekompensacie” zaobserwujemy odbicie od dodatkowej powierzchni olej-powietrze, gdyż olej może być ustawiony krzywo i odbijać światło w kierunku innym niż równoległy do padającej wiązki.

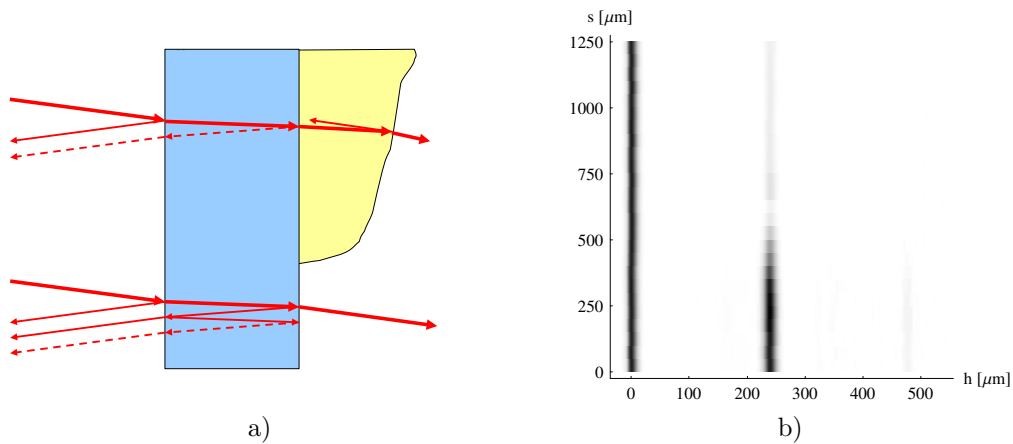
Jak widzimy, dane doświadczone zebrane omawianą metodą (rys. 6) w istocie pokrywają się ze wstępnymi rozważeniami. Teraz możemy pokusić się na więcej — zrobienie „mapy” szkiełka z naniesioną kropelką oleju. W tym celu robimy nasze pomiary (wgląd) dla różnych miejsc płytki (wzdłuż szerokości), przesuwając się po linii równoległej do powierzchni.

W istocie dostaliśmy to samo, co wcześniej. Cała mapa dzieli się na dwa obszary - ten z olejem i ten bez (w tych obszarach wyraźnie widać, odpowiednio, jedną i dwie warstwy).

²w interesującej nas skali, dogodną postacią prędkości światła jest $300 \frac{\text{nm}}{f_s}$; dla przypomnienia $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$, $1 f_s = 10^{-15} \text{ s}$



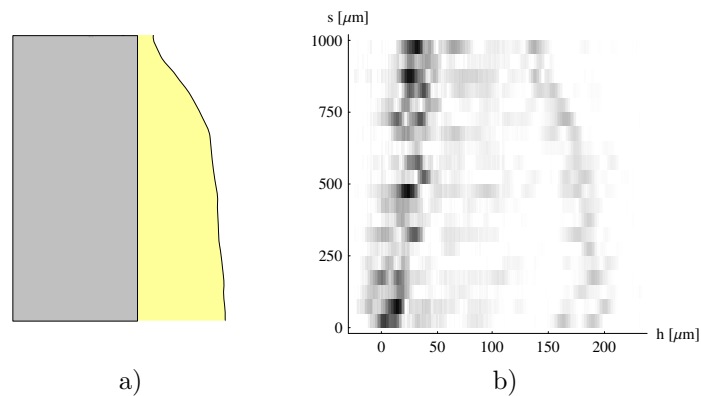
Rysunek 6: Płytkę szklaną: a) czysta, b) z naniesionym olejem.



Rysunek 7: Mapa płytki szklanej z kroplą oleju: a) rysunek schematyczny, b) dane doświadczalne.

3.2 Olej na papierze

Teraz przechodzimy do nieznacznie bardziej skomplikowanego układu. Nanosimy kroplę oleju na papier, po czym skanujemy (tak jak w przypadku szklanej płytki, wzdłuż szerokości) tworząc mapę.

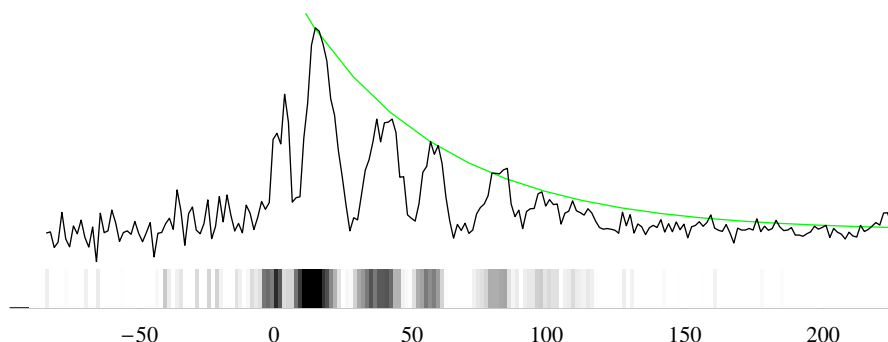


Rysunek 8: Mapa papieru z kroplą oleju po jednej stronie: a) rysunek schematyczny, b) dane doświadczalne.

Kartka papieru tym różni się od szkła, że rozprasza w całej swojej objętości. Ten fakt powoduje, że granice odbicia w papierze z olejem (rys. 8) mają inny charakter niż te w płytce szklanej (rys. 7). W szczególności, na całej głębokości papieru widzimy odbicia. Za nią znajduje się nieodbijająca warstwa oleju zakończona powierzchnią olej-powietrze. Tym razem światło odbite na tej ostatniej warstwie ma szansę wrócić do układu, co potwierdzają zebrane dane.

3.3 Białe winogrono

Czemu jednak nie zająć się czymś, czego struktury nie znamy? Weźmy np. białe winogrono i zobaczmy co wyjdzie.



Rysunek 9: Białe winogrono jako próbka.

Otrzymaliśmy serię odbić, z malejącymi natężeniami (jeśli tylko wyjąć to pierwsze). Jako że raczej nie spodziewamy się, by winogrono znacząco zmieniało się w środku, możemy przyjąć że spadek natężeń wiązek odbitych wiąże się z pochłanianiem i rozpraszaniem w miąższu. Czym dalej wiązka wnika, tym staje się słabsza. A zatem, jeśli tylko przyjąć że wewnątrz winogrona jest w miarę jednorodne (tzn. każdy cienki wewnętrzny obszar pochłania tak samo), a warstwy odbijające — do siebie podobne, spadek natężenia wraz z głębokością L powinien być *eksponencjalny* (natężenie proporcjonalne do $e^{-\gamma L}$). I taki też się okazuje (w odpowiednim przybliżeniu), co jest zaznaczone krzywą narysowaną na rys. 9. Stała γ w wykładniku wynosi tutaj $1/36,7 \frac{1}{\mu\text{m}}$ co oznacza, że na każde $36,7 \mu\text{m}$ natężenie słabnie $e \approx 2,71$ razy.

4 Podziękowania

Chcielibyśmy serdecznie podziękować prof. dr hab. Czesławowi Radzewiczowi wraz z doktorantami za opiekę naukową, przekazaną wiedzę oraz udostępnienie laboratorium. Wyrażamy także wdzięczność Wydziałowi Fizyki UW oraz Krajowemu Funduszowi na rzecz Dzieci za umożliwienie nam wzięcia udziału w Warsztatach.