Całki po trajektoriach Feynmana

Piotr Migdał

Opiekun: dr Andrzej Dragan

Seminarium Fizyki Teoretycznej

14 stycznia 2008

Żaba

- W którym kierunku ucieka żaba przed młotkiem?

Żaba

- W którym kierunku ucieka żaba przed młotkiem?
- We wszystkich kierunkach równocześnie!

Analiza wymiarowa

Stała Diraca (h kreślone)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} J \cdot s$$

Analiza wymiarowa

Stała Diraca (h kreślone)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} J \cdot s$$

W jakich miejscach mechaniki kwantowej pojawia się $\hbar$?

- Zależność energii od częstości kołowej
  $E = \hbar\omega$,

Analiza wymiarowa

Stała Diraca (h kreślone)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} J \cdot s$$

W jakich miejscach mechaniki kwantowej pojawia się $\hbar$?

- Zależność energii od częstości kołowej
  $E = \hbar\omega$,
- Kwant rzutu momentu pędu oraz kwant zmiany rzutu spinu
  $\hbar l_z$ oraz $\hbar s_z$,

Analiza wymiarowa

Stała Diraca (h kreślone)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} J \cdot s$$

W jakich miejscach mechaniki kwantowej pojawia się $\hbar$?

- Zależność energii od częstości kołowej $E = \hbar\omega$,
- Kwant rzutu momentu pędu oraz kwant zmiany rzutu spinu $\hbar l_z$ oraz $\hbar s_z$,
- Zależność amplitudy od działania $S[x(t)] = \int_0^T dt L(x, \dot{x}, t)$

Analiza wymiarowa

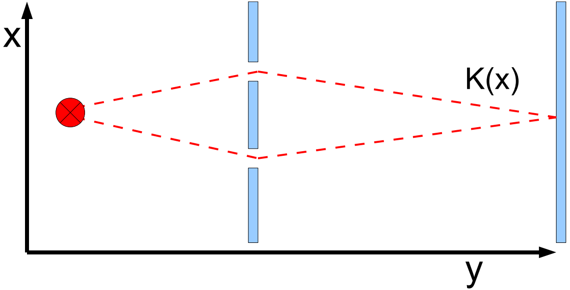
Stała Diraca (h kreślone)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34} J \cdot s$$

W jakich miejscach mechaniki kwantowej pojawia się $\hbar$?

- Zależność energii od częstości kołowej $E = \hbar\omega$,
- Kwant rzutu momentu pędu oraz kwant zmiany rzutu spinu $\hbar l_z$ oraz $\hbar s_z$,
- Zależność amplitudy od działania $S[x(t)] = \int_0^T dtL(x, \dot{x}, t)$ $\exp(\frac{i}{\hbar}S[x(t)])$.

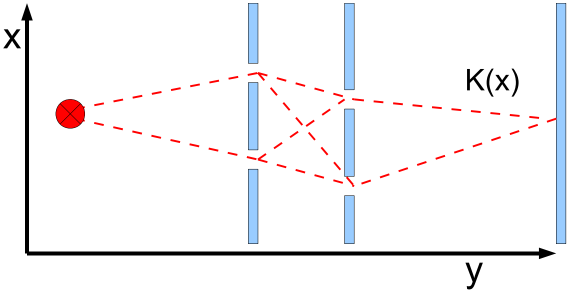
Doświadczenie Younga



Amplituda prawdopodobieństwa dotarcia światła do punktu x

$$K(x) = K_{\text{góra}} + K_{\text{dół}}$$

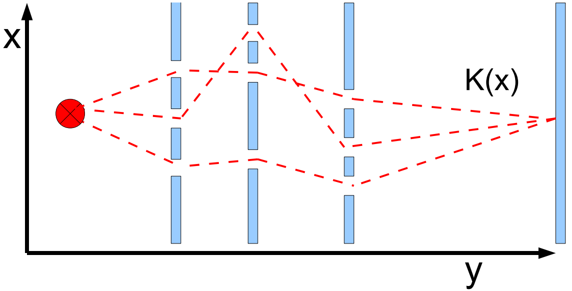
Doświadczenie Younga



Amplituda prawdopodobieństwa dotarcia światła do punktu x

$$K(x) = K_{\text{góra,góra}} + K_{\text{góra,dół}} + K_{\text{dół,góra}} + K_{\text{dół,dół}}$$

Doświadczenie Younga



Amplituda prawdopodobieństwa dotarcia światła do punktu x

$$K(x) = \sum_{\text{ścieżki}} K$$

Propagator

$$K = K(x, T; x_0, 0)$$

Propagator

$$K = K(x, T; x_0, 0) = \langle x | \hat{U}(T, 0) | x_0 \rangle$$

Propagator

$$K = K(x, T; x_0, 0) = \langle x | \hat{U}(T, 0) | x_0 \rangle$$

Równanie Schrödingera (wraz z rozwiązaniem)

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle$$

Propagator

$$K = K(x, T; x_0, 0) = \langle x | \hat{U}(T, 0) | x_0 \rangle$$

Równanie Schrödingera (wraz z rozwiązaniem)

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = e^{-i\hat{H}T/\hbar} |\psi_0\rangle$$

Propagator

$$K = K(x, T; x_0, 0) = \langle x | \hat{U}(T, 0) | x_0 \rangle$$

Równanie Schrödingera (wraz z rozwiązaniem)

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = e^{-i\hat{H}T/\hbar} |\psi_0\rangle$$

$$K(x, T, x_0, 0) = \langle x | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | x_0 \rangle$$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Położenie

- $\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Położenie

- $\hat{x}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle$
- $\langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0)$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Położenie

- $\hat{x} \left|x\right\rangle = x \left|x\right\rangle$
- $\left\langle x | x_0 \right\rangle = \delta(x - x_0)$
- $\hat{I} = \int dx \left|x\right\rangle \left\langle x\right|$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Położenie

- $\hat{x} \left| x \right\rangle = x \left| x \right\rangle$
- $\langle x | x_0 \rangle = \delta(x - x_0)$
- $\hat{I} = \int dx \left| x \right\rangle \left\langle x \right|$

Pęd

- $\hat{p} \left| p \right\rangle = p \left| p \right\rangle$
- $\langle p | p_0 \rangle = 2\pi\hbar\delta(p - p_0)$
- $\hat{I} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left| p \right\rangle \left\langle p \right|$

Hamiltonian, pęd, położenie

Standardowy Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Położenie

- $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$
- $\langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0)$
- $\hat{I} = \int dx\,|x\rangle\,\langle x|$

Pęd

- $\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$
- $\langle p|p_0\rangle = 2\pi\hbar\delta(p - p_0)$
- $\hat{I} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\,|p\rangle\,\langle p|$

Związek pędu z położeniem

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}$$

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

$$K(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N | e^{-i\hat{H}\tau N} | x_0 \rangle$$

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

$$K(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N | \, e^{-i\hat{H}\tau N} \, | x_0 \rangle = \langle x_N | \, e^{-i\hat{H}\tau} e^{-i\hat{H}\tau} \ldots e^{-i\hat{H}\tau} \, | x_0 \rangle$$

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

$$K(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau N} |x_0\rangle = \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau} e^{-i\hat{H}\tau} \ldots e^{-i\hat{H}\tau} |x_0\rangle$$

$$= \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau} \left(\int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}|\right) e^{-i\hat{H}\tau} \cdots$$
$$\cdots \left(\int dx_2 |x_2\rangle \langle x_2|\right) e^{-i\hat{H}\tau} \left(\int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1|\right) e^{i\hat{H}\tau} |x_0\rangle$$

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

$$K(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau N} |x_0\rangle = \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau} e^{-i\hat{H}\tau} \ldots e^{-i\hat{H}\tau} |x_0\rangle$$

$$= \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau} \left(\textstyle\int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}|\right) e^{-i\hat{H}\tau} \cdots$$
$$\cdots \left(\textstyle\int dx_2 |x_2\rangle \langle x_2|\right) e^{-i\hat{H}\tau} \left(\textstyle\int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1|\right) e^{i\hat{H}\tau} |x_0\rangle$$

$$= \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \langle x_N| e^{-i\hat{H}\tau} |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}| e^{-i\hat{H}\tau} |x_{N-2}\rangle \cdots$$
$$\cdots \langle x_2| e^{-i\hat{H}\tau} |x_1\rangle \langle x_1| e^{i\hat{H}\tau} |x_0\rangle$$

Dzielimy ewolucję na N równych kawałków

Przyjmujemy, że krok czasowy to $\tau = \frac{T}{N\hbar}$.

$$K(x_N, T, x_0, 0) = \langle x_N | e^{-i\hat{H}\tau N} | x_0 \rangle = \langle x_N | e^{-i\hat{H}\tau} e^{-i\hat{H}\tau} \ldots e^{-i\hat{H}\tau} | x_0 \rangle$$

$$= \langle x_N | e^{-i\hat{H}\tau} \left(\int dx_{N-1} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | \right) e^{-i\hat{H}\tau} \cdots$$
$$\cdots \left(\int dx_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | \right) e^{-i\hat{H}\tau} \left(\int dx_1 | x_1 \rangle \langle x_1 | \right) e^{i\hat{H}\tau} | x_0 \rangle$$

$$= \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \langle x_N | e^{-i\hat{H}\tau} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-i\hat{H}\tau} | x_{N-2} \rangle \cdots$$
$$\cdots \langle x_2 | e^{-i\hat{H}\tau} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{i\hat{H}\tau} | x_0 \rangle$$

$$= \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K_{x_N, x_{N-1}} K_{x_{N-1}, x_{N-2}} \cdots K_{x_1, x_0}$$

Propagator dla krótkiego czasu τ

$$K_{x_{n+1},x_n} = \langle x_{n+1}| \, e^{-i\hat{H}\tau} \, |x_n\rangle$$

Propagator dla krótkiego czasu τ

$$K_{x_{n+1},x_n} = \langle x_{n+1}| \, e^{-i\hat{H}\tau} \, |x_n\rangle \; = \langle x_{n+1}| \left(1 - i\hat{H}\tau\right) |x_n\rangle + o(\tau)$$

Propagator dla krótkiego czasu τ

$$K_{x_{n+1},x_n} = \langle x_{n+1}| e^{-i\hat{H}\tau} |x_n\rangle = \langle x_{n+1}| \left(1 - i\hat{H}\tau\right) |x_n\rangle + o(\tau)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x_{n+1}| \left(1 - i\tau\frac{\hat{p}^2}{2m} - i\tau V(\hat{x})\right) |p\rangle \langle p|x_n\rangle$$

Propagator dla krótkiego czasu τ

$$K_{x_{n+1},x_n} = \langle x_{n+1}| e^{-i\hat{H}\tau} |x_n\rangle = \langle x_{n+1}| \left(1 - i\hat{H}\tau\right) |x_n\rangle + o(\tau)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x_{n+1}| \left(1 - i\tau\frac{\hat{p}^2}{2m} - i\tau V(\hat{x})\right) |p\rangle \langle p|x_n\rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left(1 - i\tau\frac{p^2}{2m} - i\tau V(x_{n+1})\right) \langle x_{n+1}|p\rangle \langle p|x_n\rangle$$

Propagator dla krótkiego czasu τ

$$K_{x_{n+1},x_n} = \langle x_{n+1}| e^{-i\hat{H}\tau} |x_n\rangle = \langle x_{n+1}| \left(1 - i\hat{H}\tau\right) |x_n\rangle + o(\tau)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle x_{n+1}| \left(1 - i\tau\frac{\hat{p}^2}{2m} - i\tau V(\hat{x})\right) |p\rangle \langle p|x_n\rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left(1 - i\tau\frac{p^2}{2m} - i\tau V(x_{n+1})\right) \langle x_{n+1}|p\rangle \langle p|x_n\rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(-i\tau\left(\frac{p^2}{2m} + V(x_{n+1})\right)\right) \exp\left(ip\frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar}\right)$$

Propagator dla krótkiego czasu τ — ciąg dalszy

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(-i\tau\left(\frac{p^2}{2m} + V(x_{n+1}) - p\frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}\right)\right)$$

Propagator dla krótkiego czasu τ — ciąg dalszy

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(-i\tau\left(\frac{p^2}{2m} + V(x_{n+1}) - p\frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}\right)\right)$$

- Przyjmujemy, że $\dot{x}_n := \frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}$.

Propagator dla krótkiego czasu τ — ciąg dalszy

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(-i\tau\left(\frac{p^2}{2m} + V(x_{n+1}) - p\frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}\right)\right)$$

- Przyjmujemy, że $\dot{x}_n := \frac{x_{n+1}-x_n}{\hbar\tau}$.

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i\tau(p\dot{x}_n - p^2/(2m))} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\tau\hbar^2}} e^{i\tau m\dot{x}_n^2/2}$$

Propagator dla krótkiego czasu τ — ciąg dalszy

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(-i\tau\left(\frac{p^2}{2m} + V(x_{n+1}) - p\frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}\right)\right)$$

- Przyjmujemy, że $\dot{x}_n := \frac{x_{n+1} - x_n}{\hbar\tau}$.

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i\tau(p\dot{x}_n - p^2/(2m))} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\tau\hbar^2}} e^{i\tau m\dot{x}_n^2/2}$$

$$K_{x_{n+1},x_n} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\tau\hbar^2}} \exp i\tau\left(\frac{m\dot{x}_n^2}{2} - V(x_{n+1})\right)$$

Całka po trajektorii

$$K = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K_{x_N, x_{N-1}} K_{x_{N-1}, x_{N-2}} \cdots K_{x_1, x_0}$$

Całka po trajektorii

$$K = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K_{x_N, x_{N-1}} K_{x_{N-1}, x_{N-2}} \cdots K_{x_1, x_0}$$

Całka po trajektorii (w przestrzeni konfiguracyjnej)

$$K = \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar^2} \right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp \sum_{n=0}^{N-1} i\tau \left(\frac{m \dot{x}_n^2}{2} - V(x_{n+1}) \right)$$

Całka po trajektorii

$$K = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K_{x_N, x_{N-1}} K_{x_{N-1}, x_{N-2}} \cdots K_{x_1, x_0}$$

Całka po trajektorii (w przestrzeni konfiguracyjnej)

$$K = \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar^2} \right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp \sum_{n=0}^{N-1} i\tau \left(\frac{m\dot{x}_n^2}{2} - V(x_{n+1}) \right)$$

...a dla $\lim\limits_{n \to \infty}$ definiujemy...

Całka po trajektorii

$$K = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K_{x_N, x_{N-1}} K_{x_{N-1}, x_{N-2}} \cdots K_{x_1, x_0}$$

Całka po trajektorii (w przestrzeni konfiguracyjnej)

$$K = \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar^2} \right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp \sum_{n=0}^{N-1} i\tau \left(\frac{m\dot{x}_n^2}{2} - V(x_{n+1}) \right)$$

...a dla $\lim\limits_{n \to \infty}$ definiujemy...

$$K =: \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right)$$

Cząstka swobodna ($L = m\dot{x}^2/2$)

Cząstka swobodna ($L = m\dot{x}^2/2$)

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar}\right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp\left(i \frac{m\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau \hbar} \right)^2 \right)$$

Cząstka swobodna ($L = m\dot{x}^2/2$)

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar}\right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp\left(i \frac{m\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau\hbar} \right)^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar}\right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi i \tau \hbar^2}{m}\right)^{(N-1)/2} e^{im(x-x_0)^2/(2N\tau\hbar)}$$

Cząstka swobodna ($L = m\dot{x}^2/2$)

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\tau\hbar}\right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp\left(i\frac{m\tau}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau\hbar}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\tau\hbar}\right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi i\tau\hbar^2}{m}\right)^{(N-1)/2} e^{im(x-x_0)^2/(2N\tau\hbar)}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} e^{\frac{i}{\hbar}m(x-x_0)^2/(2T)}$$

Cząstka swobodna ($L = m\dot{x}^2/2$)

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar}\right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp\left(i \frac{m\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau\hbar}\right)^2 \right)$$

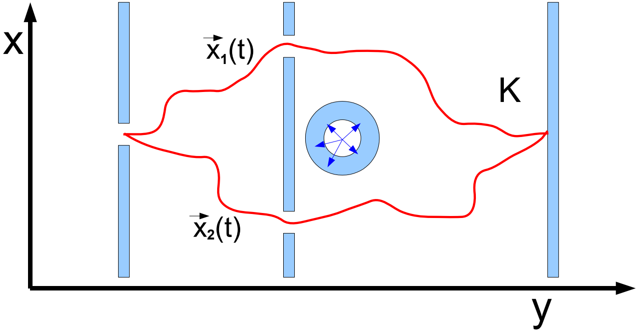
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar}\right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi i \tau \hbar^2}{m}\right)^{(N-1)/2} e^{im(x-x_0)^2/(2N\tau\hbar)}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} e^{\frac{i}{\hbar} m(x-x_0)^2/(2T)}$$

Prosty Lagranżjan ma prostego propagatora

$$K(x, T; x_0, 0) = A(T) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x_{\mathrm{cl}}(t)]\right)$$

Doświadczenie Aharonova-Bohma — schemat



$$K = K_1 + K_2$$

Oddziaływanie z potencjałem wektorowym

Lagranżjan odpowiadający oddziaływaniu z polem magnetycznym

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}),$$

Oddziaływanie z potencjałem wektorowym

Lagranżjan odpowiadający oddziaływaniu z polem magnetycznym

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = L_0(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + q\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}),$$

gdzie $\vec{A}$ to potencjał wektorowy ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$)

Oddziaływanie z potencjałem wektorowym

Lagranżjan odpowiadający oddziaływaniu z polem magnetycznym

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}),$$

gdzie $\vec{A}$ to potencjał wektorowy ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$)

$$K(\Phi) = \int \mathcal{D}\vec{x}_1 t e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}_1(t)]} + \int \mathcal{D}\vec{x}_2 t e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}_2(t)]}$$

Oddziaływanie z potencjałem wektorowym

Lagranżjan odpowiadający oddziaływaniu z polem magnetycznym

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}),$$

gdzie $\vec{A}$ to potencjał wektorowy ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$)

$$K(\Phi) = \int \mathcal{D}\vec{x}_1 t e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}_1(t)]} + \int \mathcal{D}\vec{x}_2 t e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}_2(t)]}$$

$$e^{i\varphi} K(\Phi) = K_1 + K_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \int dt \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{A}(\vec{x}) \right)$$

Strumień

$$\int dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

Strumień

$$\int dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

$$= \int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \int_\Sigma d\vec{n} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \right) = \int_\Sigma \vec{B}(\vec{x}) d\vec{n} = \Phi$$

Strumień

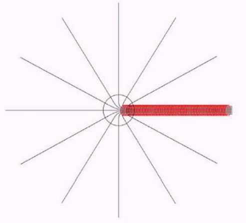
$$\int dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

$$= \int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \int_\Sigma d\vec{n} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \right) = \int_\Sigma \vec{B}(\vec{x}) d\vec{n} = \Phi$$

Obraz interferencyjny zależy od ukrytego strumienia!

$$e^{i\varphi} K(\Phi) = K_1 + K_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} q\Phi \right)$$

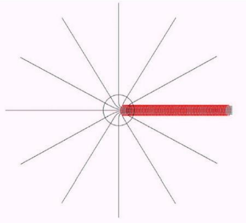
Monopol Diraca



Dlaczego ładunek jest skwantowany

- Nieskończony solenoid z jednym końcem może być modelem monopola.

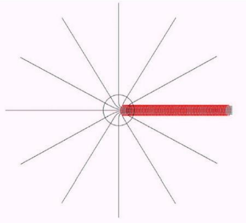
Monopol Diraca



Dlaczego ładunek jest skwantowany

- Nieskończony solenoid z jednym końcem może być modelem monopola.
- Jeśli rozmieszczenie włókna ma nie wpływać na ruch cząstek, to

Monopol Diraca

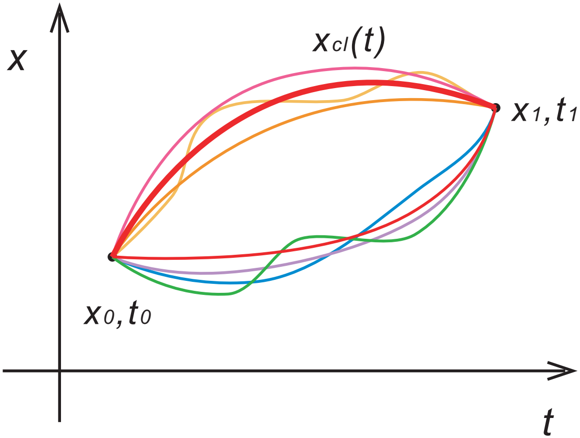


Dlaczego ładunek jest skwantowany

- Nieskończony solenoid z jednym końcem może być modelem monopola.
- Jeśli rozmieszczenie włókna ma nie wpływać na ruch cząstek, to

$$\frac{q\Phi}{\hbar} = 2\pi n.$$

„Wyprowadzenie” mechaniki klasycznej



Dirac i Feynman

P.A.M. Dirac

R. P. Feynman

Bibliografia / dalsza lektura

- R. P. Feynman, A. R. Hibbs,
  „*Quantum Mechanics and Path Integrals*”

Bibliografia / dalsza lektura

- R. P. Feynman, A. R. Hibbs,
  „*Quantum Mechanics and Path Integrals*"
- R. Shankar,
  „*Mechanika kwantowa*", *rozdziały 8. i 21.*

Bibliografia / dalsza lektura

- R. P. Feynman, A. R. Hibbs,
  „*Quantum Mechanics and Path Integrals*"
- R. Shankar,
  „*Mechanika kwantowa*", *rozdziały 8. i 21.*
- R. MacKenzie,
  „*Path Integral Methods and Applications*",
  http://arxiv.org/abs/quant-ph/0004090v1