

Zasada najmniejszego działania w fizyce

referat wygłoszony na konferencji:

Around Calculus of Variations, 29.08-01.09.2007, Małe Ciche koło Zakopanego

Piotr Migdał

13 października 2007

W obecnym stanie ten artykuł jest notatką na brudno tego, co wygłosiłem na konferencji. Niemniej, może się przydać do wygłoszenia referatu bądź do bardzo krótkiego wprowadzenia do mechaniki klasycznej.

Inaczej niż to zwykle bywa (w standardowym wprowadzeniu), zakładam matematyczne zacięcie słuchaczy, przy ich tylko licealnej wiedzy z fizyki.

1 Słówko o konwencji

Fizycy często oznaczają różniczkowanie po czasie danej wielkości przez stawianie kropki nad nią. Operację postawienia kropki nad można iterować — w szczególności dwie kropki oznaczają pochodną drugiego rzędu. Tym samym oznaczamy

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} := \frac{d^2x}{dt^2}.$$

W mechanice klasycznej często pojawiają się wektory — elementy n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej (\mathbb{R}^n). By zaznaczyć, że dana wielkość jest wektorem, stawia się nad nią strzałkę, lub pisze pogrubioną czcionką. My wybierzemy to drugie

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Przez różniczkowanie funkcji f dającej wartości rzeczywiste po wektorze rozumiemy gradient, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

2 Powtórka z liceum

Jednym z najważniejszych postulatów fizyki klasycznej jest *II prawo Newtona*. Sformułujmy je następująco:

Przyspieszenie $\ddot{\mathbf{x}}$ doznawane przez ciało jest wprost proporcjonalne do siły \mathbf{F} na nie działającej i odwrotnie proporcjonalne do jego masy m .

Te prawo możemy zapisać w sposób następujący

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że masa m jest stała, zaś siła \mathbf{F} może zależeć zarówno od położenia \mathbf{x} , jak i czasu t . Dodatkowo, ograniczmy się do przypadku, w którym siła jest *potencjalna* (tzn. jest gradientem pewnej funkcji). Założenie to nie jest przesadnie mocne, gdyż zarówno w siła elektryczna w elektrostatyce, jak siła ciężkości w newtonowskiej grawitacji jest potencjalna.

Zatem, oznaczając potencjał literą V , zapisujemy

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2)$$

3 Lagranżjan

Zabierzmy się za przekształcanie równania ruchu (1) z siłą potencjalną (2)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (-V).$$

Dostaniemy dokładnie to samo w obu nawiasach, gdy wstawimy w nich

$$L := \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V, \quad (4)$$

gdyż różniczkowanie po prędkości wyzeruje V , a branie pochodnej po położeniu zabije wyraz $\dot{\mathbf{x}}$.

Zaraz, zaraz — właśnie otrzymaliśmy *równanie Eulera-Lagrange'a*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}. \quad (5)$$

Jak pamiętamy, jest ono równoważne stwierdzeniu, że funkcjonal

$$S(\mathbf{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt \quad (6)$$

dla ustalonych czasów i położzeń krańcowych (t.j. t_0 , $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, t_1 i $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$) osiąga punkt stacjonarny (czyli jego pochodna w każdym kierunku jest zerem).

Tym samym doszliśmy do wniosku, że równania Newtona (3) są równoważne pewnemu problemowi wariacyjnemu $\delta S(\mathbf{x}(t)) = 0$.

Jeszcze chwilkę odnośnie nazewnictwa

- L (4) nazywamy *lagranżjanem* lub *funkcją Lagrange'a*,
- wyraz $\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2$ nazywamy *energiją kinetyczną* i zwykle oznaczamy literą T ,
- funkcję V nazywamy *potencjałem uogólnionym*,
- funkcjonal S (6) nazywamy *działaniem*.

Co warto zaznaczyć, w mechanice newtonowskiej (czyli niekwantowej, i nierelatywistycznej) przekształcenie równania ruchu Newtona (3) do równania Eulera-Lagrange'a (5) nie tylko wygląda jak sztuczka matematyczna. Ono po prostu jest sztuczką matematyczną. W szczególności po to potencjał nazwaliśmy uogólnionym, by móc wciskać do niego cokolwiek, byleby odtworzyć zadane równania ruchu.

4 Zasada najmniejszego działania

Zasadę mówiącą, że działanie S (zdefiniowane w (6)) osiąga swój punkt stacjonarny na prawdziwych trajektoriach nazywa się *zasadą Hamiltona* lub *zasadą najmniejszego działania*. To drugie określenie, częściej stosowane, jest niefortunne — w ogólności punkt stacjonarny nie musi być przecież minimum. Coś w tej nazwie jednak siedzi — działanie może być minimum lub punktem siodłowym, ale nigdy punktem przegięcia ani maksimum.

W dalszej części artykułu postaram się unaocznić i udowodnić powyższe stwierdzenie.

4.1 Cząstka w pustej przestrzeni — minimum działania

Przyjmijmy następujące dane (z lenistwa przyjmując $m = 2$)

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{\dot{\mathbf{x}}^2}_T - \underbrace{0}_V, \\ t_0 &= 0, \quad \mathbf{x}_0 = (0, 0, 0), \\ t_1 &= 1, \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0). \end{aligned} \tag{7}$$

Jeśli podstawimy warunki (7) do równań Eulera-Lagrange'a dostaniemy, pewnie bez dziwienia, ruch jednostajny prostoliniowy

$$\mathbf{x}(t) = (t, 0, 0). \tag{8}$$

Bez większego trudu liczymy, że dla tej ruchu działanie jest równe 1.

Pokażemy, że dla każdego innego ruchu działanie jest większe.

$$S = \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}^2 dt \geq \int_0^1 \dot{x}_1^2 dt \geq \left(\int_0^1 \dot{x}_1 dt \right)^2 = 1$$

Wykorzystaliśmy fakt, że usunięcie wyrazów nieujemnych nie zmniejsza wyniku oraz nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną¹. W drugim oszacowaniu równość zachodzi wyłącznie dla funkcji stałej (jeśli bierzemy pod uwagę tylko funkcje ciągłe).

4.2 Potencjał w kształcie rynny — punkt siodłowy działania

Przyjmijmy tym razem potencjał w kształcie rynny i masę równą 1

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2}_T - \underbrace{kx_2^2}_V, \\ t_0 &= -1, \quad \mathbf{x}_0 = (-1, 0, 0), \\ t_1 &= 1, \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0). \end{aligned} \tag{9}$$

Korzystając z równań Eulera-Lagrange'a (5) dochodzimy do wniosku, że jedna z możliwości to ruch jednostajny prostoliniowy wzdłuż rynny. Policzmy działanie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a(t) &= (t, 0), \\ S(\mathbf{x}_a(t)) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dt = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

¹albo z nierównością Schwartza $\sqrt{\int_0^1 \dot{x}_1^2 dt \int_0^1 1 dt} \geq \int_0^1 \dot{x}_1 dt$

Spróbujmy ten ruch zaburzyć dodając do współrzędnej x_1 lub x_2 pewien dodatkowy wyraz. Oczywiście nie możemy zapomnieć warunku, by owe zaburzenia pozostawiły punkty początkowe i końcowe bez zmian. Zwykle powstałe w ten sposób funkcje nie będą rozwiązaniami równania ruchu.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b(t) &= (t + \varepsilon \cos(\frac{\pi}{2}t), 0), \\ S(\mathbf{x}_b(t)) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - \varepsilon \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t))^2 dt = 1 + \frac{\pi^2}{8} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Czyli funkcja $\mathbf{x}_a(t)$ nie jest lokalnym maksimum działania (ani punktem przegięcia).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(t) &= (t, \varepsilon \cos(\frac{\pi}{2}t)), \\ S(\mathbf{x}_c(t)) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - k (\varepsilon \cos(\frac{\pi}{2}t))^2 \right) dt = 1 + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{k}{2} \right) \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Tym razem sytuacja zależy od stałej k . Weźmy dostatecznie duże k tak, by działanie w (12) było mniejsze od 1. Tym samym funkcja $\mathbf{x}_a(t)$ nie jest lokalnym minimum działania.

Mówiąc innymi słowami - mamy przed sobą przykład, w którym realna funkcja opisująca ruch cząstki jest punktem siodłowym działania.

4.3 A dlaczego nie maksimum?

Od konkretnego przykładu ciekawsze bywają dowody. Zacznę od prostszego, mówiącego że gdy potencjał V nie zależy od czasu, punkt stacjonarny funkcjonału S nie jest maksimum globalnym.

4.3.1 Dlaczego nie maksimum globalne — przebiegamy trasę trzy razy

Bez starty ogólności przyjmijmy, że rozważanym przedziałem czasowym jest $[0, 1]$. Przyjmijmy, że V nie zależy w sposób jawny od czasu. Rozumujmy nie wprost — niech $\mathbf{x}(t)$ będzie maksimum globalnym działania. Spróbujmy przebyć tą samą trasę trzy razy szybciej w następujący sposób

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(1) \rightarrow \mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(1).$$

Konkretnie, rozważmy następującą funkcję

$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(3t) & 0 \leq t < \frac{1}{3}, \\ \mathbf{x}(2 - 3t) & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}, \\ \mathbf{x}(-2 + 3t) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Co może nas niepokoić, funkcja zdefiniowana w (13) ma nieciągłą pochodną w dwóch punktach. Nie jest to szczególnie straszna rzecz — w działaniu (6) nie ma wyrazów zależnych od przyspieszenia ani dalszych pochodnych. Tym samym można postarać się wygładzić skoki, tylko nieznacznie zaburzając funkcjonał.

Obliczmy działanie

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{x}_M(t)) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(3t))^2 - V(\mathbf{x}(3t)) \right) dt \\
&+ \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(2-3t))^2 - V(\mathbf{x}(2-3t)) \right) dt \\
&+ \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(-2+3t))^2 - V(\mathbf{x}(2-3t)) \right) dt \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}m 9\dot{\mathbf{x}}(t)^2 - V(\mathbf{x}(t)) \right) dt \\
&= S(\mathbf{x}(t)) + 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}(t)^2 \right) dt \geq S(\mathbf{x}(t)).
\end{aligned}$$

Okazuje się, że jest równe $S(\mathbf{x}(t))$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciało cały czas cały czas spoczywa. Ten szczególny (choć niezbyt ciekawy) przypadek obejmuje kolejne rozumowanie, więc nie zaprzatajmy sobie nim głowy.

4.3.2 Dlaczego nawet nie maksimum lokalne — zacznijmy drzeć

Mamy dany pewien lagranżjan L oraz funkcję $\mathbf{x}(t)$ spełniającą równanie Eulera-Lagrange'a (dla wygody obliczeń, czasy początkowe i końcowe to $-\pi$ i π). Pokażemy, że owa funkcja nie jest maksimum działania S . Zacznijmy od zmiany parametryzacji — niech parametrem przebiegającym wzdłuż $\mathbf{x}(t)$ będzie $y(t)$. Dodatkowo, niech $|\dot{y}(t)| = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$. Oczywiście, nowa parametryzacja może nie być jednoznaczna (w wypadku samoprzecięć $\mathbf{x}(t)$), jednak to w niczym nam nie przeszkadza.

Weźmy teraz zaburzony ruch, dla pewnego ε (niekoniecznie dodatniego) oraz dla n całkowitego dodatniego.

$$y_M(t) = y(t) + \frac{\varepsilon}{n} \cos(nt) \quad (14)$$

Mówiąc opisowo o (14), przebywamy drogę wzdłuż wcześniej wytyczonej trasy, tym razem trzęsąc się: to w przód, to w tył. Mamy nadzieję tym sposobem zwiększyć przyczynę działania od energii kinetycznej, w miarę możliwości nie zmieniając innych przyczynków.

$$\begin{aligned}
S(y_n(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{d}{dt} (y(t) + \frac{\varepsilon}{n} \cos(nt)) \right)^2 - V(y(t) + \varepsilon \cos(nt)) \right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}m (\dot{y}^2(t) - 2\dot{y}(t)\varepsilon \sin(nt) + \varepsilon^2 \sin^2(nt)) \right. \\
&\quad \left. - V(y(t)) - \frac{\partial V(y(t))}{\partial y} \frac{\varepsilon}{n} \cos(nt) - O\left(\frac{\varepsilon^2}{n^2} \cos^2(nt)\right) \right) dt \\
&= S(y(t)) + \frac{1}{2}m\pi\varepsilon^2 - \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \left(2\dot{y}(t) \sin(nt) + \frac{\partial V(y(t))}{\partial y} \frac{\cos(nt)}{n} \right) - \int_{-\pi}^{\pi} O\left(\frac{\varepsilon^2}{n^2} \cos^2(nt)\right) dt. \quad (15)
\end{aligned}$$

Warto na chwile zastanowić się, co mamy takiego w (15). Wyraz zależący liniowo od ε musi się zerować — przecież $y(t)$ jest punktem stacjonarnym S . Więcej komentarza wymaga całkowanie ogona. Skoro potencjał jest ograniczony wzdłuż $y(t)$ (a także nieznacznie poza końcami), to dla każdego punktu y jego przesunięcie (t.j. $V(y(t) + \varepsilon \cos(nt)) - V(y(t))$) jest skończone. Co więcej, przesunięcia są ograniczone, a zatem i całka jest skończona. Tym samym, dla $n \rightarrow \infty$ ogon zanika. Zatem możemy wybrać takie n_0 , że c jest dowolnie

małe we wzorze

$$S(y_{n_0}(t)) = S(y(t)) + (\frac{1}{2}m\pi - c)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (16)$$

Czyli skoro współczynnik przy wyrazie ε^2 we wzorze (16) jest dodatni, funkcja $y(t)$ nie jest lokalnym minimum działania S .

5 Energia

Gdy lagranżjan nie zależy w sposób jawny od czasu, z równań Eulera-Lagrange'a (5) można wyprowadzić całkę pierwszą

$$E = \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L. \quad (17)$$

Stała E jest nazywana, nie bez przyczyny, *energiją całkowitą*. Podstawmy w tym celu lagranżjan (4) do (17)

$$\begin{aligned} E &= \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V \right) - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + V \\ &= m \dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + V = T + V. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] W. I. ARNOLD, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- [2] G. BIAŁKOWSKI, *Mechanika klasyczna: mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej*, PWN, Warszawa 1975.
- [3] M. WIERZBICKI, *Mechanika klasyczna*, dostępne na <http://if.pw.edu.pl/~wierzba/> (stan z 2007-09-08).
- [4] C. G. GRAY, E. F. TAYLOR, *When action is not least*, American Journal of Physics, Vol. 75, No. 5, May 2007, pages 434-458 dostępne na <http://www.eftaylor.com/leastaction.html> (stan z 2007-09-08)
- [5] *Around Calculus of Variations*, 29.08-01.09.2007, Małe Ciche, dostępne na http://www.ii.uj.edu.pl/~male_ciche/ (stan z 2007-09-08).