Matematyczny model gry w mafię

Piotr Migdał

MISMaP UW

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Proseminarium licencjackie „Teoria gier”

22 stycznia 2009

Gra w mafię

- Gra towarzyska dla 4-30 osób

Gra w mafię

- Gra towarzyska dla 4-30 osób
- Uczestnicy są rozlosowani pomiędzy mafię i miastowych
- Mafia zna się wzajemnie, miasto - nie
- Naprzemienne tury: dzień i noc
- W dzień ginie osoba wybrana przez całą społeczność na drodze demokratycznego głosowania (lincz)
- W nocy ginie osoba wskazana przez mafię (jeden miastowy)

Cel i metodologia

Cel:

- Określenie ile powinno być mafii m na daną liczbę uczestników n, by szansa jej wygrana wynosiła 50%
- Badanie dynamiki gry

Cel i metodologia

Cel:

- Określenie ile powinno być mafii m na daną liczbę uczestników n, by szansa jej wygrana wynosiła 50%
- Badanie dynamiki gry

Metodologia:

- Rozważanie najprostszego modelu
- Pominięcie części psychologicznej
- Opisanie stanu gry przez liczbę miastowych c i mafii m

Strategia dominująca

- Strategią dominującą jest linczowanie losowej osoby

Strategia dominująca

- Strategią dominującą jest linczowanie losowej osoby
- Gdyby istniała lepsza strategia dla mafii,
  miasto mogłoby wymusić losowość grą w marynarza

Strategia dominująca

- Strategią dominującą jest linczowanie losowej osoby
- Gdyby istniała lepsza strategia dla mafii,
  miasto mogłoby wymusić losowość grą w marynarza
- Gdyby istniała lepsza strategia dla miasta,
  mafia mogłaby w trakcie dnia zachowywać się dokładnie tak samo jak miasto

Wzór rekurencyjny

- Dla ustalenia uwagi grę zaczynamy od dnia

Wzór rekurencyjny

- Dla ustalenia uwagi grę zaczynamy od dnia
- W trakcie dnia ginie losowa osoba:
  z prawdopodobieństwem $\frac{c}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
  z prawdopodobieństwem $\frac{m}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c, m-1)$

Wzór rekurencyjny

- Dla ustalenia uwagi grę zaczynamy od dnia
- W trakcie dnia ginie losowa osoba:
  z prawdopodobieństwem $\frac{c}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
  z prawdopodobieństwem $\frac{m}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c, m-1)$
- W trakcie nocy ginie jeden miastowy:
  $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$

Wzór rekurencyjny

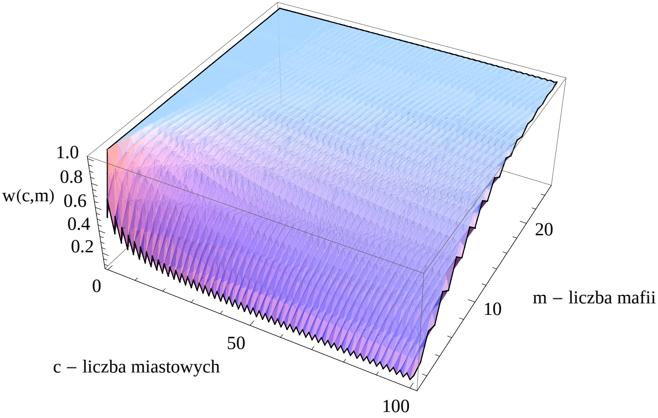
- Dla ustalenia uwagi grę zaczynamy od dnia
- W trakcie dnia ginie losowa osoba:
  z prawdopodobieństwem $\frac{c}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
  z prawdopodobieństwem $\frac{m}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c, m-1)$
- W trakcie nocy ginie jeden miastowy:
  $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
- Szanse wygrania mafii przy c miastowych i m mafii to

Wzór rekurencyjny

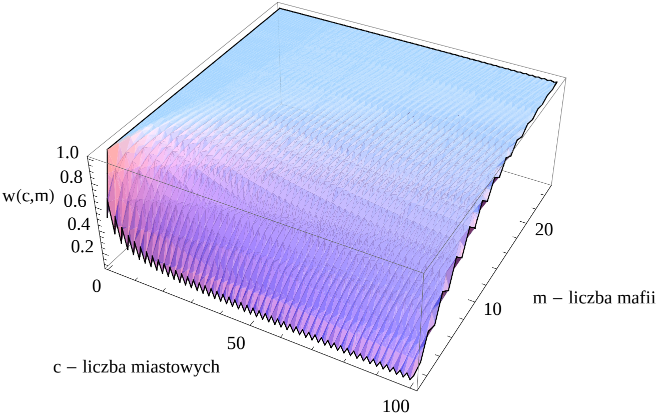
- Dla ustalenia uwagi grę zaczynamy od dnia
- W trakcie dnia ginie losowa osoba:
  z prawdopodobieństwem $\frac{c}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
  z prawdopodobieństwem $\frac{m}{c+m}$ zachodzi $(c, m) \longrightarrow (c, m-1)$
- W trakcie nocy ginie jeden miastowy:
  $(c, m) \longrightarrow (c-1, m)$
- Szanse wygrania mafii przy c miastowych i m mafii to

$$w(c, m) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } m = 0, \\ 1 & \text{gdy } m > c, \\ \frac{c}{c+m} w(c-2, m) + \frac{m}{c+m} w(c-1, m-1) & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Symulacja numeryczna 1

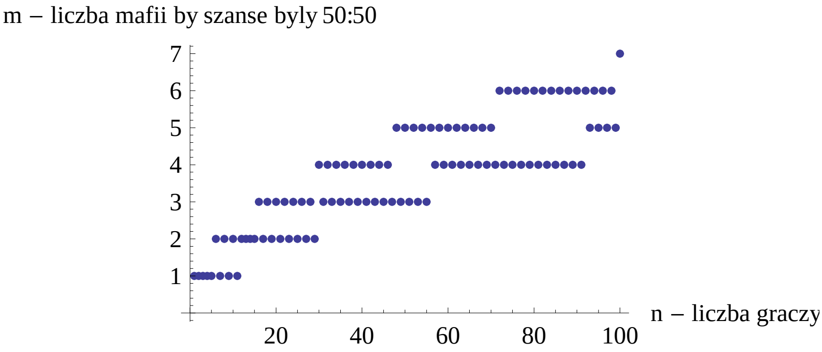


Symulacja numeryczna 1



- Ząbki nie są błędem numerycznym ani graficznym!

Symulacja numeryczna 2



Naiwny model

- Przybliżamy r. rekurencyjne przez r. różniczkowe
- Obliczamy zachowanie się średniej liczby mafii $\langle m \rangle$ od czasu

Naiwny model

- Przybliżamy r. rekurencyjne przez r. różniczkowe
- Obliczamy zachowanie się średniej liczby mafii $\langle m \rangle$ od czasu

$$\frac{d}{dt}\langle m \rangle = -\frac{\langle m \rangle}{N - 2t}$$

Naiwny model

- Przybliżamy r. rekurencyjne przez r. różniczkowe
- Obliczamy zachowanie się średniej liczby mafii $\langle m \rangle$ od czasu

$$\frac{d}{dt}\langle m \rangle = -\frac{\langle m \rangle}{N - 2t}$$

$$\langle m \rangle = \frac{M}{\sqrt{N}}\sqrt{N - 2t}$$

Naiwny model

- Przybliżamy r. rekurencyjne przez r. różniczkowe
- Obliczamy zachowanie się średniej liczby mafii $\langle m \rangle$ od czasu

$$\frac{d}{dt}\langle m \rangle = -\frac{\langle m \rangle}{N - 2t}$$

$$\langle m \rangle = \frac{M}{\sqrt{N}}\sqrt{N - 2t}$$

$$m + c = 2 \Rightarrow t = \frac{N}{2} - 1$$

$$1 = \frac{M}{\sqrt{N}}\sqrt{2} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}}$$

Paradoks

- $w(2,1) > w(1,1)$, bo $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$!

Paradoks

- $w(2,1) > w(1,1)$, bo $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$!
- Policzmy szansę wygrania w grze z jedną mafią w zależności od parzystości miastowych

$$w(2n-1,1) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Paradoks

- $w(2,1) > w(1,1)$, bo $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$!
- Policzmy szansę wygrania w grze z jedną mafią w zależności od parzystości miastowych

$$w(2n-1,1) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$w(2n,1) = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$\frac{\pi}{2}$

- Uśrednienie po parzystości

$$\sqrt{w(2n-1,1)w(2n,1)} = \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$\frac{\pi}{2}$

- Uśrednienie po parzystości

$$\sqrt{w(2n-1,1)w(2n,1)} = \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

- Stosunek prawdopodobieństw dla przypadku parzystej i nieparzystej liczby miastowych

$$\frac{w(2n,1)}{w(2n-1,1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \Big/ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

$\frac{\pi}{2}$

- Uśrednienie po parzystości

$$\sqrt{w(2n-1,1)w(2n,1)} = \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

- Stosunek prawdopodobieństw dla przypadku parzystej i nieparzystej liczby miastowych

$$\frac{w(2n,1)}{w(2n-1,1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \Big/ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

- ...ale wzór Wallisa mówi, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Jakim narzędziem?

- **Teoria gier**

Jakim narzędziem?

- **Teoria gier**
- Kombinatoryka
- Rachunek prawdopodobieństwa
- Równania różniczkowe

Jakim narzędziem?

- **Teoria gier**
- Kombinatoryka
- Rachunek prawdopodobieństwa
- Równania różniczkowe
- Podejście fizyka...

Dalsze plany

- Uściślić zależność $m \sim \sqrt{n}$
- Rozważyć bardziej zaawansowane modele
- ...?

Dalsze plany

- Uściślić zależność $m \sim \sqrt{n}$
- Rozważyć bardziej zaawansowane modele
- ...? (w końcu to badanie naukowe!)

Możliwe zastosowania

- Eksperymenty psychologiczne
- Modele bardziej zaawansowanych gier towarzyskich (Ktulu?)
- Poszukiwanie i opis podobnych zjawisk w socjologii i ekonomii

Bibliografia

- http://www.princeton.edu/∼mafia/
- http://www.maximumawesome.com/articles/mafiaoriginal.htm
- H.W. de Haan, W.H. Hesselink, G.R.R. de Lavalette, *An abstract multi-agent framework applied to a social interaction game*, http://www.ai.rug.nl/conf/bnaic2004/ap/a47new.pdf
- M. Braverman, O. Etesami, E. Mossel, *Mafia: A Theoretical Study Of Players and Coalitions in a Partial Information Environment* (2006, arxiv.org) (2008, Annals of Applied Probability)
- E. Yao, *A Theoretical Study of Mafia Games* (2008, arxiv.org)