Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Piotr Migdał
Nr albumu: 234522

Matematyczny model gry w mafię

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA W RAMACH MIĘDZYWYDZIAŁOWYCH INDYWIDUALNYCH STUDIÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dra hab. Jacka Miękisza
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Wrzesień 2009

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Rozważam matematyczny model gry towarzyskiej, jaką jest gra w mafię. Precyzuję zasady gry w podobny sposób, jaki widnieje we wcześniejszych pracach. Szukam prawdopodobieństwa wygrania mafii w funkcji początkowej liczebności miasta i członków mafii. Zajmuję się jego jakościowym zachowaniem, a także znajduję jawne rozwiązanie. Badam dynamikę gry, sprowadzając ją do procesu urodzin i śmierci, zarówno dla czasu dyskretnego, jak i ciągłego. Otrzymuję ścisłe rozwiązania, a także zajmuję się ich niektórymi jakościowymi własnościami.

Słowa kluczowe

gra w mafię, proces urodzin i śmierci, łańcuch Markowa, funkcja tworząca

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

60 Probability theory and stochastic processes
60J Markov processes
60J10 Markov chains (discrete-time Markov processes on discrete state spaces)
60J28 Applications of continuous-time Markov processes on discrete state spaces

Tytuł pracy w języku angielskim

A Mathematical Model of the Mafia Game

Spis treści

Wprowadzenie

Mafia jest jedną z towarzyskich gier psychologicznych. Można ją spotkać w Europie i Stanach Zjednoczonych, zarówno wśród uczniów, jak i studentów. Mówi się, że została wymyślona w Rosji przez Dymitra Dawidowa w 1986 roku [2], choć podobne zabawy pojawiły się nieznacznie wcześniej [1].

Osią gry w mafię jest wzajemne zwalczanie się dwóch różnych grup — mafii i miastowych. Frakcje nie są symetryczne — mafia jest uprzywilejowana pod względem posiadanych informacji oraz możliwości działań, za to miasto — bardziej liczne. Rozgrywka składa się z dwóch naprzemiennych faz — dnia i nocy, zaś kończy się wraz z pozostaniem przy życiu tylko jednej grupy. Podstawowe działania w trakcie dnia to dyskusja i linczowanie (eliminacja) uczestników na drodze demokratycznego głosowania, zaś w czasie nocy — zabijanie miastowego przez mafię.

Istnieje wiele różnych odmian gry w mafię [3], przy czym modyfikacja mechaniki gry najczęściej polega na dodaniu postaci mających specjalne zdolności. Praktycznie zawsze występuję postać detektywa (vel Kataniego) — miastowego, który w trakcie nocy ma możliwość sprawdzenia tożsamości wskazanej osoby. Inną popularną postacią jest lekarz (vel ksiądz, kurtyzana) — osoba mogąca uchronić miastowego przed nocnym mordem. Najbardziej rozbudowaną wersją gry w mafię, ze znanych autorowi, jest Ktulu [4]. W Ktulu istnieją cztery różne frakcje, każda osoba ma specjalną funkcję, a warunki zwycięstwa są dyktowane przez posiadanie specjalnego przedmiotu — posążka.

W niniejszej pracy skupię się na jałowej wersji gry w mafię, w której występują tylko mafia i miastowi, bez żadnych dodatkowych ról, przedmiotów ani umiejętności. Nie jest to popularna wersja, za to z uwagi na swą prostotę dobrze nadaje się do analizy matematycznej. Z możliwych modeli obiorę najprostszy, który jest również rozważany w pracach [5], [6] i [7]. Główne pytania, jakie stawiam, dotyczą szans wygrania mafii oraz dynamiki gry. Szanse wygrania mafii w funkcji początkowej liczebności mafii i miasta były już badane w [6] i [7]. Oba artykuły zajmowały się asymptotycznymi własnościami tej funkcji, podczas gdy niniejsza praca obejmuje również jej dyskretne własności oraz podaje jej jawne rozwiązanie. Dynamika gry, a dokładniej analiza prawdopodobieństwa, że danej doby będzie określona liczba członków mafii, nie wystąpiła w żadnej z istniejących prac.

Pracy przyświecają dwa główne cele, poza samą przyjemnością liczenia i pisania. Pierwszy z nich to umożliwienie badania psychologicznej części gry w mafię, a także gier pokrewnych. Wyniki teoretyczne mogą zostać porównane z wynikami doświadczalnymi. Wszelkie rozbieżności będą źródłem cennych informacji dotyczących strategii intuicyjnie obieranych przez graczy, ukrywania tożsamości, manipulacji innymi oraz ujawniania przeciwników. Drugi — to ugruntowanie punktu startowego do modelowania procesów społecznych, politycznych i gospodarczych mających zbliżoną naturę. Być może podobne narzędzia przydadzą się do opisu takich zjawisk jak korupcja, zawieranie umów i sojuszy „pod stołem”, organizację akcji terrorystycznych, działanie nielegalnej opozycji czy też tajnych stowarzyszeń.

Przez większość pracy będę skupiał się na opisie matematycznym zjawiska występującego w przyrodzie. Tym samym będę pisał „po fizycznemu", jak mogąc unikając zbędnego formalizmu wszędzie tam, gdzie zaciemniłby on obraz. Niemniej wszelkie założenia, przybliżenia i uproszczenia wymienię explicite.

Układ pracy jest następujący. W Rozdziale 1 definiuję zasady gry, wprowadzam jej opis i udowadniam zasadność strategii linczowania losowej osoby. Rozdział 2 zawiera szczegółowe rozważanie przypadku gry z jednoosobową mafią oraz jakościową analizą szans wygrania mafii. W Rozdziale 3 wprowadzam opis dynamiki gry, wraz z zastosowaniem metody pola średniego oraz przybliżenia równań różnicowych przez różniczkowe. Rozdział 4 podsumowuje otrzymane wyniki i daje perspektywę dalszej pracy. W Dodatkach A i B zawieram wyprowadzenia rozwiązań równań z Rozdziału 3 przy użyciu odpowiednich funkcji tworzących.

Rozdział 1

Model

Zanim przejdę do matematycznej analizy gry w mafię, wypiszę jej zasady. Zaznaczam przy tym, że ich wybór ma charakter arbitralny. Część założeń podejmuję dla uproszczenia gry (czy też jej uogólnienia), inne dla ustalenia uwagi. O ile silnie wzoruję się na grze występującej w rzeczywistości, podejrzewam że zaproponowany model nie jest popularny (choćby z powodu braku jednej postaci — detektywa).

Do gry potrzeba $n+1$ osób, przy czym graczy jest n, a jedna osoba (mistrz gry) zajmuje się koordynacją rozgrywki. Mistrz gry ustala, ilu będzie członków mafii m, a ile miastowych c (można być tylko w jednej z grup oraz $m+c=n$). Przydzielenie przynależności odbywa się w sposób tajny i losowy (np. przez ciągnięcie kart).

Część właściwa składa się z dwóch naprzemiennych faz — dnia i nocy. W trakcie nocy członkowie mafii wspólnie wybierają, jaką osobę chcą wyeliminować. Tylko oni mają otwarte oczy i mogą wzajemnie się porozumiewać. Dzień składa się z dyskusji oraz głosowania. Wszelkie dyskusje są jawne, a w ich trakcie miastowi próbują dociec, kto jest w mafii. Każdy ma prawo do wysunięcia jednej kandydatury do linczu. Wszyscy gracze mają dokładnie po jednym głosie, zaś samo głosowanie odbywa się w sposób jawny. Osoba, która uzbiera najwięcej głosów, zostaje wyeliminowana. W przypadku remisu linczuje się dokładnie jedną osobę, wybraną z remisujących w sposób losowy. Karty zmarłych są ujawniane, a oni sami nie mogą nic powiedzieć. Gra kończy się, gdy przy życiu zostaje tylko jedna frakcja, zaś celem gry jest spowodowanie wygrania własnej grupy (niezależnie, czy się przeżyło, czy też nie).

Wiadomo, że w trakcie nocy zawsze ginie jeden miastowy, a w czasie dnia — jeden miastowy albo jeden członek mafii. Tym samym jedyne dozwolone przejścia to $(c, m) \to (c-2, m)$ i $(c, m) \to (c-1, m-1)$. Prawdopodobieństwa obu procesów mogą być funkcją c, m i poprzednich wydarzeń.

Na starcie zaniedbuję część psychologiczną, skupiając się wyłącznie na strategicznym i probabilistycznym aspekcie tej gry. To jest grube przybliżenie, w szczególności iż psychologia jest immanentną częścią gry w mafię i prawdopodobnie gdyby nie ona, ta gra nie byłaby atrakcyjna. Niemniej, sam jałowy model ma szereg interesujących cech, nieraz nieintuicyjnych. Dodatkowo, na pierwszy rzut oka ciężko stwierdzić, gdzie i w jaki sposób psychologia wpływa na rozgrywkę. Wydaje się zatem zasadne, by modelowanie zacząć od najprostszej wersji gry i dopiero później przejść do bardziej realistycznych modeli.

Chciałbym podkreślić, iż powyższy opis ustalonej wersji gry w mafię jest nieformalny. Nie zamierzam go dokładnie precyzować, gdyż jest to uciążliwe i niewnoszące wiele do dalszej części pracy. Jedną z zasadniczych trudności jest formalizacja przebiegu dyskusji i jej wpływu na późniejsze głosowanie.

Z tego powodu stosuję pojęcia z teorii gier, takie jak „gracz” czy „strategia”, w ich intuicyjnym znaczeniu. Uważam, że ich użycie jest zasadne, gdyż w większości sytuacji nie powinno prowadzić do konfuzji. Co więcej, w bardziej zaawansowanych modelach gry w mafię nie będzie już możliwe uniknięcie teoriogrowych rozważań.

Nie jest oczywiste, czy jako graczy lepiej uznać 2 frakcje, czy też n osób [8]. W naszym bardzo uproszczonym przypadku wystarczy pierwsza opcja, dając tym samym grę o sumie zerowej. W ogólniejszych rozważaniach należy przyjąć, że mamy do czynienia z n graczami [5].

Pragnę zauważyć, że w podanym wariancie gry strategia obejmuje wyłącznie fazę dnia (t.j. dyskusję i głosowanie). Póki pomijamy część psychologiczną i nie ma wyróżnionych osób pod względem posiadanych informacji, bez straty ogólności przyjmujemy, że mafia w nocy zabija dowolną osobę. Przykładowe strategie, unikające trudności związanych z dyskusją, to:

- dla mafii (lub dla każdego z członków mafii):
  głosować niezależnie, wyłącznie na miastowych,

- dla miasta (lub dla każdego z miastowych):
  głosować na osobę, która sumarycznie otrzymała najmniej głosów (w wypadku remisu — głosować niezależnie, tylko na te osoby).

Jak już zostało pokazane w [6], wystarczy się ograniczyć do jednej, bardzo prostej pary strategii. Owocuje ona linczem losowej osoby — t.j. szansa, że w trakcie dnia zginie miastowy, to $c/(c+m)$, a członek mafii – $m/(c+m)$. Szanse wygranej mafii w takiej rozgrywce oznaczamy przez $w(c,m)$.

Pokażemy, że zarówno mafia, jak i miasto może narzucić linczowanie losowej osoby. Oczywiście, z powodu niedoprecyzowania zasad, stać nas wyłącznie na nieformalną agitację.

Agitacja

i) Mafia może postępować tak w ciągu dni, by w żaden sposób nie wyróżnić się. Jest to możliwe, gdyż

- każdy członek mafii posiada informację o grze nie mniejszą niż dowolny miastowy,

- miastowi nie są w posiadaniu żadnych danych, na podstawie których mogliby wykryć mafię.

Tym samym w trakcie głosowania nikt nie jest wyróżniony i z symetrii zachodzi linczowanie losowej osoby.

ii) Rozważmy jedynie przypadek, gdy $c \geqslant m$, gdyż jedynie wtedy miasto ma jakiekolwiek szanse wygrać. W trakcie dnia dowolny miastowy proponuje grę w marynarza, t.j. wszyscy jednocześnie mają podać liczbę k_i, od 1 do liczby żywych uczestników $c+m$. Miastowi dołączają się do rozgrywki, po czym wszyscy głosują na $(\sum_i k_i \mod (c+m))$-tą osobę, licząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara od proponującej system. Tym samym linczowana jest losowa osoba. Gdy $c > m$, nie ma znaczenia, czy członkowie mafii też podadzą liczbę czy zbojkotują system, ani też jak będą głosować. Przypadek $c = m$ arbitralnie pomijamy z powodu szeregu komplikacji. Czynimy dodatkowe założenie, że wtedy z jednakowym prawdopodobieństwem ginie członek mafii lub miastowy. ∎

Skoro zarówno miasto, jak i mafia może narzucić linczowanie losowej osoby, szanse wygranej mafii to $w(c,m)$. Gdyby szanse te byłyby niższe niż $w(c,m)$ – mafia narzuciłaby linczowanie losowej osoby, gdyby wyższe niż $w(c,m)$ – zrobiłoby to miasto.

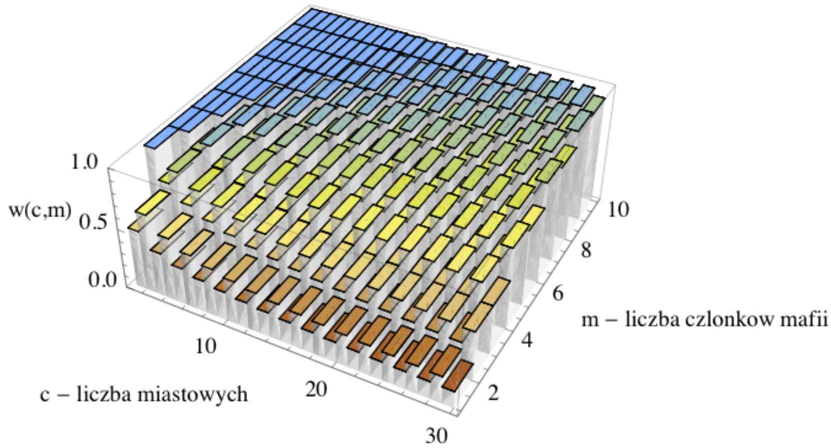
Uwaga — powyższe stwierdzenie nie gwarantuje unikalności strategii dającej szanse na wygranie mafii równe $w(c, m)$. Jeśli interesują nas tylko prawdopodobieństwa wygranej, wystarczy, że rozważymy strategię w. Dzięki niej gra zdecydowanie się upraszcza, gdyż prawdopodobieństwo wygrania mafii jest wyłącznie funkcją aktualnej liczby członków mafii m i miastowych c (nie zależy jawnie od poprzednich ruchów). Dla ustalenia uwagi, grę zaczynamy od fazy dnia. Rozpoczęcie w nocy wymagałoby dodania miastowego, który tej nocy zginie.

Pamiętając o warunkach brzegowych, otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$w(c, m) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } m = 0, \\ 1 & \text{gdy } m > c, \\ \frac{c}{c+m} w(c-2, m) + \frac{m}{c+m} w(c-1, m-1) & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Powyższe równanie stanowi oś pracy, zaś jego rozwiązanie jest wykreślone w rys. 1.1. Szczególnie istotnym praktycznie pytaniem jest ilu powinno być członków mafii przy zadanej liczbie graczy $m(n)$, by szanse wygranej obu frakcji były porównywalne $w(c, m) \approx \frac{1}{2}$. Wcześniejsze publikacje [6] i [7] dają zależność $m \propto \sqrt{n}$, którą pojawi się też w tej pracy.

Zajmę się również sprawami wcześniej nie opisywanymi w literaturze. Zbadam właściwości gry z jednym członkiem mafii, gdyż ten prosty przykład obrazuje szereg ogólniejszych zjawisk. Zastanowię się nad jakościowym zachowaniem $w(c, m)$, m.in. w zależności od parzystości liczby graczy. Na deser znajdę jawne rozwiązanie (1.1).



Rysunek 1.1: Wykres szans wygrania mafii $w(c, m)$, będący numerycznym rozwiązaniem równania (1.1). Charakterystyczne „ząbki” mają swoje źródło w silnym wpływie parzystości liczby mieszkańców $c + m$ na zachowanie $w(c, m)$.

Rozdział 2

Szanse wygrania mafii

W tym rozdziale zajmę się jakościową analizą szans wygrania mafii, czyli rozwiązań równania rekurencyjnego (1.1). Rozważę szczegółowo przypadek gry z jednoosobową mafią, po czym pokażę kilka zjawisk zachodzących w ogólności.

2.1. Jednoosobowa mafia

Zajmę się drobiazgową analizą szans wygrania mafii, gdy gra odbywa się tylko z jednym jej członkiem $w(c,1)$. Ten szczególny przypadek jest istotny z kilku powodów, a mianowicie:

- można łatwo podać jawny wzór na $w(c,1)$,
- demonstruje on szereg własności, które łatwo sprawdzić, a występują w ogólności,
- jak się okazuje, jest dość praktyczny — t.j. dla gier z liczbą graczy do ok. 10 właśnie jednoosobowa mafia daje porównywalne szanse wygrania obu frakcji.

Gdy mamy do czynienia z jednoosobową mafią, prawdopodobieństwo jej wygrania to nic innego, jak iloczyn prawdopodobieństw, że każdego dnia zostanie zlinczowany miastowy. Pamiętając, że zaczynamy grę od fazy dnia, otrzymujemy

$$w(c,1) = \frac{c}{c+1} \cdot \frac{c-2}{c-1} \cdot \frac{c-4}{c-3} \cdot \ldots \cdot \frac{1+(c \bmod 2)}{2+(c \bmod 2)} = \frac{c!!}{(c+1)!!}. \tag{2.1}$$

Powyższy wzór ma pewne własności zależne od parzystości c. O ile dodanie dwóch miastowych ewidentnie zmniejsza szansę wygrania mafii $w(c+2,1) < w(c,1)$, tak już być nie musi w przypadku dodania tylko jednego miastowego. Jak się okazuje, dodając parzystego miastowego zwiększamy szansę mafii. Dla ilustracji tego zjawiska posłużmy się prostym przykładem.

Rozważmy sytuację, w której na starcie mamy jednego członka mafii i jednego miastowego. Mafia wygrywa tylko wtedy, gdy zostanie zlinczowany miastowy. Z uwagi na oczywisty remis, wybór ofiary jest dokonywany np. na podstawie rzutu monetą, co daje $w(1,1) = \frac{1}{2}$. Gdy na starcie jest jeden członek mafii i dwóch miastowych, również mafia wygrywa, gdy zostanie zlinczowany miastowy (drugiego dobije w nocy). Tym razem trudniej ją upolować i $w(2,1) = \frac{2}{3}$.

Można podejrzewać, że natknęliśmy się na artefakt wynikający z doboru warunków brzegowych (t.j. ustaleniu, że w przypadku remisu ginie losowa osoba, a nie np. miastowy) lub rozważania „za małych” c czy też m. Żadna z tych możliwości nie jest prawdziwa. Czytelnik z łatwością sprawdzi, że zamieniając w (1.1) linijkę „0 gdy $m > c$” na „0 gdy $m \geqslant c$” otrzymamy analogicznie zjawisko.

Stwierdzenie 2.1.1 *Dla dowolnego c mamy* $w(c,1) < w(c-2,1)$*, a dla parzystego c zachodzi* $w(c,1) > w(c-1,1)$.

Dowód

i) $w(c,1) = \frac{c}{c+1}w(c-2,1) < w(c-2,1)$.

ii) Niech $c = 2k$. Przy szacowaniu różnicy $w(2k,1) - w(2k-1,1)$ będziemy korzystać z niezbyt skomplikowanej nierówności $\sqrt{(n+1)(n-1)} < n$.

$$\begin{aligned} w(2k,1) - w(2k-1,1) &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \\ &- \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \\ &> \frac{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{5\cdot 3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3\cdot 1}}{3} + \\ &- \frac{2n-1}{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}} \cdot \frac{2k-3}{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{\sqrt{5\cdot 3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

zatem w istocie $w(2k,1) > w(2k-1,1)$. ∎

Rozważmy uśrednienie $w(c,1)$ po sąsiedniej parzystej i nieparzystej wartości. Średnia geometryczna doskonale nadaje się do tego celu, gdyż zastosowanie jej znacznie uprości wynik,

$$\sqrt{w(c-1,1)w(c,1)} = \sqrt{\frac{(c-1)!!}{c!!}\frac{c!!}{(c+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{c+1}}, \tag{2.3}$$

zatem otrzymaliśmy funkcję monotoniczną, pozbawioną „ząbków". Przy jednoosobowej mafii uśredniona szansa wygranej mafii zachowuje się jak $c^{-\frac{1}{2}}$. W celu uzyskania różnych przybliżeń w zależności od parzystości c, znów oznaczając $c = 2k$, obliczmy stosunek

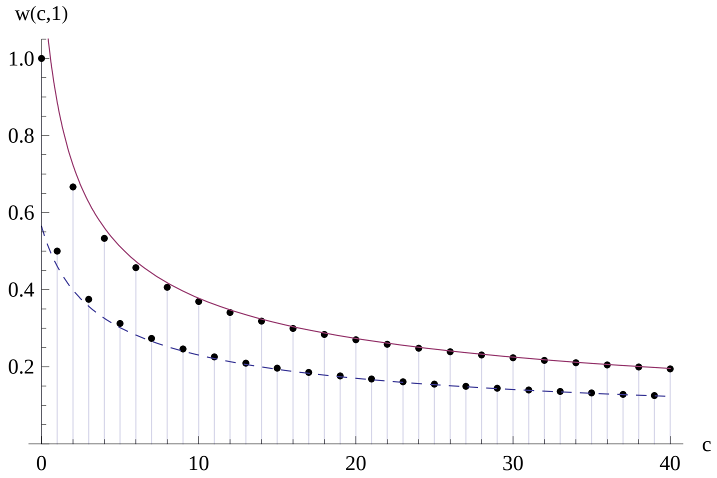
$$\frac{w(2k,1)}{w(2k-1,1)} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \Big/ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}. \tag{2.4}$$

Sama postać (2.4) niczego nie upraszcza. Na szczęście powyższe wyrażenie ma granicę przy k dążącym do nieskończoności. W istocie wzór Wallisa [9] na π jest niczym innym niż

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1}. \tag{2.5}$$

Zbieżność wyrażenia (2.4) do $\frac{\pi}{2}$ jest przyzwoita, przynajmniej do naszego użytku. Nie będziemy się nad nią rozwodzić, jedynie podamy porównanie przybliżeń z ścisłymi wynikami (rys. 2.1).

$$\begin{aligned} w(2k-1,1) &= \left(\frac{w(2k,1)}{w(2k-1,1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{w(2k-1,1)w(2k,1)} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}, \\ w(2k,1) &= \left(\frac{w(2k,1)}{w(2k-1,1)}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{w(2k-1,1)w(2k,1)} \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$



Rysunek 2.1: Wykres szans wygrania jednoosobowej mafii. Punkty z słupkami reprezentują ścisłe wyniki $w(c, 1)$, zaś linie są jej przybliżeniami (2.6) – ciągła dla parzystych c i przerywana dla nieparzystych c.

Jak przekonaliśmy się, równanie (1.1) daje wyniki, które mogą być nieintuicyjne. Rozważmy taką sytuację: jest nas czterech i chcemy zagrać z jednoosobową mafią. Ma ona szansę wygrania $w(3, 1) = \frac{3}{8} = 0.375$. Jeśliby zaprosić dodatkowe pięć osób i grać w dziewiątkę (wciąż z jednoosobową mafią), szanse wygranej mafii wzrosną do $w(8, 1) = \frac{128}{315} \approx 0.406$.

2.2. Jakościowe rozważania dla mafii dowolnie licznej

Warto zbadać jak jakościowo zachowuje się $w(c, m)$. Pytania, które mogą się narzucać, to:

- Czy dodanie dwóch miastowych zmniejsza szansę mafii, t.j. czy $w(c+2, m) < w(c, m)$?
- Czy dodanie jednego miastowego i jednego członka mafii zwiększa jej szansę, t.j. czy $w(c+1, m+1) > w(c, m)$?
- Czy zmiana jednego miastowego na jednego członka mafii zwiększa jej szansę, t.j. czy $w(c-1, m+1) > w(c, m)$?

Stwierdzenie 2.2.1 *Warunki $w(c-1, m+1) > w(c+1, m+1)$, $w(c+1, m+1) > w(c, m)$ i $w(c-1, m+1) > w(c, m)$ są równoważne.*

Dowód W celu pokazania ich równoważności, zapiszmy równanie rekurencyjne na (1.1) dla $c \geqslant m > 0$, czyli

$$w(c, m) = \frac{c}{c+m} w(c-2, m) + \frac{m}{c+m} w(c-1, m-1).$$

Po drobnej kosmetyce, polegającej wyłącznie na mnożeniu i odejmowaniu stronami, otrzymujemy dwa równania

$$c\left(w(c-2, m) - w(c, m)\right) = m\left(w(c, m) - w(c-1, m-1)\right), \quad (2.7)$$
$$(c+m)\left(w(c, m) - w(c-1, m-1)\right) = c\left(w(c-2, m) - w(c-1, m-1)\right).$$

Bezpośrednio z (2.7) otrzymujemy tożsamości

$$w(c-2,m) > w(c,m) \Leftrightarrow w(c,m) > w(c-1,m-1) \Leftrightarrow w(c-2,m) > w(c-1,m-1). \tag{2.8}$$

$\blacksquare$

Od samej równoważności kilku „oczywistych" nierówności bardziej może nas interesować, czy one rzeczywiście zachodzą. Okazuje się, że tak. W tym celu udowodnijmy trzeci wyraz z (2.8), formułując go następująco:

Stwierdzenie 2.2.2 *Gdy zamienimy członka mafii na miastowego, nie zwiększamy szansy wygranej mafii czyli* $w(c,m+1) \geqslant w(c+1,m)$*. Gdy dodatkowo* $c \geqslant m$*, zachodzi ostra nierówność* $w(c,m+1) > w(c+1,m)$*.*

Dowód Do gry z c miastowymi i m członkami mafii wprowadźmy jednego agenta (dodatkowego gracza). Agent ma stanowić symulację osoby, która może być albo miastowym, albo członkiem mafii. Pokażemy, że jest to możliwe i dość późno będzie on musiał ujawnić swoją afiliację.

Z uwagi na nierozróżnialność członków miasta, możemy założyć, że mafia zbija ich w nocy w ustalonej kolejności. Jeśli agent jest miastowym, ma on numer ostatni. W trakcie linczu pojawiają się trzy możliwości

- Zginie miastowy.
- Zginie członek mafii.
- Zginie agent.

W przypadku śmierci agenta, wynik dalszej rozgrywki nie zależy od jego przynależności. W pozostałych przypadkach gra toczy się dalej. Agent musi pokazać swoją kartę, gdy będzie ona miała jawny wpływ na jej wynik. Dzieje się to w dwóch okolicznościach:

- Gdy zginą wszyscy członkowie mafii i zostanie agent.
- Gdy zostanie co najwyżej jeden miastowy, 1-2 członków mafii i agent.

Dla obu sytuacji zwiększy on szanse mafii, gdy się nią okaże. Tabelka przedstawia analizę wszystkich możliwych przypadków:

Stan gry (miastowi,mafia)	w gdy agent jest miastowym	w gdy agent jest członkiem mafii
$(c,0)$	0	$w(c,1)$
$(0,1)$	$\frac{1}{2}$	1
$(1,1)$	$\frac{1}{3}$	1
$(1,2)$	$\frac{1}{4}$	1

Prawdopodobieństwo wygrania mafii jest równe średniej szansie wygrania w rozłącznych podgrach, wagowanej po prawdopodobieństwach dojścia do poszczególnych podgier. Skoro zamiana agenta z miastowego na mafijnego nie rusza wag, ale zmienia na wyższe szanse wygrania w części gier, otrzymujemy $w(c,m+1) \geqslant w(c+1,m)$.

W sytuacji gdy jest niezerowa szansa, że agent będzie musiał ujawnić swoją kartkę, zachodzi ostra nierówność $w(c,m+1) > w(c+1,m)$. Wystarczy by $c \geqslant m$ – wtedy istnieje podgra, w której zostają zlinczowani wszyscy członkowie mafii. $\blacksquare$

Rozdział 3

Proces czystej śmierci

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy szanse wygrania mafii w zależności od początkowej liczby miastowych i członków mafii. Równie ciekawe wydaje się śledzenie dynamiki gry, czyli prawdopodobieństw, że w po t-tej dobie będzie dokładnie c miastowych i m członków mafii. Takie rozważania wciąż mieszczą się w ramach zaproponowanego modelu, jednak wykraczają poza równanie (1.1). Oznaczmy początkową liczbę wszystkich graczy przez N, a członków mafii przez M. Każdej doby giną dwie osoby, czyli liczba osób po t-tej dobie to

$$n(t) = N - 2t. \tag{3.1}$$

3.1. Ewolucja z czasem dyskretnym

Prawdopodobieństwo, że jest dokładnie m członków mafii oznaczmy przez $p_m(t)$. Na początku jest dokładnie M członków mafii, czyli $p_m(0) = \delta_{mM}$. W trakcie każdej doby może zostać zlinczowana mafia lub miastowy, a ewolucja jest opisywana przez $M + 1$ równań liniowych

$$p_m(t+1) = \frac{(N-2t)-m}{N-2t} p_m(t) + \frac{m+1}{N-2t} p_{m+1}(t), \tag{3.2}$$

dla $m \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Proces opisywany przez te równanie to proces stochastyczny, w którym możliwe są wyłącznie przejścia pomiędzy stanem sąsiednimi stanami $(m-1) \rightleftharpoons (m)$. Taki proces jest nazywany procesem urodzin i śmierci z czasem dyskretnym [10]. W naszym przypadku wyłącznie możliwa jest śmierć mafii, tzn. każdej doby członek mafii może przeżyć $(m) \to (m)$ bądź zginąć $(m) \to (m-1)$, zatem jest to tzw. proces czystej śmierci. Pewną komplikację stanowi fakt, że współczynniki przejścia są funkcją czasu.

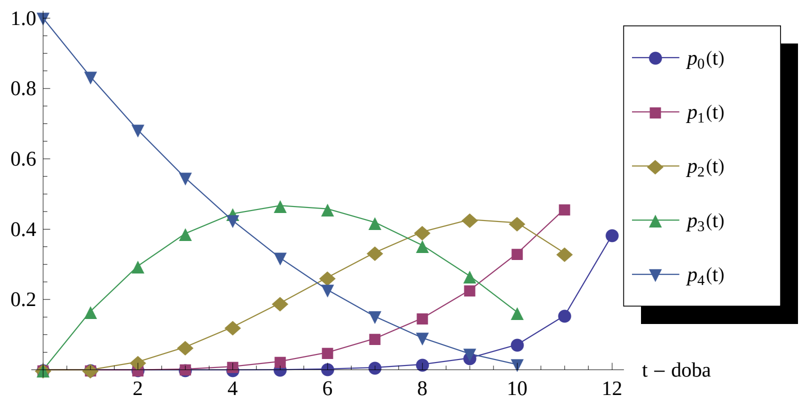
Należy podkreślić, że równanie (3.2) jest ściśle poprawne wyłącznie dla $m \leqslant n(t)$, t.j. gdy żyje co najmniej jeden miastowy i gra może toczyć się według ustalonych zasad. Co jest kluczowe, pozostałe $p_m(t)$ pozostają poprawne.

Jawnym wyrażeniem na $p_m(t)$ jest

$$p_m(t) = \sum_{k=m}^{M} \binom{M}{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \frac{(N-2t)!!}{N!!} \frac{(N-k)!!}{(N-2t-k)!!}. \tag{3.3}$$

Wyprowadzenie tego wyniku znajduje się w Dodatku Rozwiązanie r. różnicowego na $p_m(t)$ przy użyciu f. tworzącej. Typowe zachowanie rozwiązania jest przedstawione na rys. 3.1.

Rozwiązanie (3.3) jest nie tylko ciekawe same w sobie, lecz pozwala również uzyskać zwartą postać szans wygrania mafii $w(c, m)$(1.1). Wystarczy zaobserwować, że prawdopodobieństwo



Rysunek 3.1: Prawdopodobieństwa, że jest dokładnie m członków mafii w funkcji czasu t, zgodnie z (3.3). Przedstawiono grę dla początkowej liczby miastowych $C = 20$ i członków mafii $M = 4$. Dorysowano linie dla większej przejrzystości wykresu. Należy zwrócić uwagę, że funkcje $p_m(t)$ są określone tylko dla czasów $t \leqslant (N-m)/2$.

wygrania miasta po t dobach to nic innego jak $p_0(t)$. Tym samym otrzymujemy

$$w(c,m) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(c+m-k)!!}{(c+m)!!(\mu-k)!!}, \tag{3.4}$$

gdzie

$$\mu = (c+m) \bmod 2$$

jest funkcją parzystości liczby graczy.

O ile rozwiązanie (3.3) daje pełną informację o ewolucji stanu gry, nie jest ono szczególnie proste do dalszej analizy. Z tego powodu prześledźmy, ilu pozostaje średnio członków mafii po t dobach, a mianowicie zbadajmy

$$\langle m \rangle(t) = \sum_{m=0}^{M} m p_m(t). \tag{3.5}$$

Tego typu średnie są szczególnie proste do wyliczenia w przypadku procesów narodzin i śmierci, w których współczynniki przejścia są proporcjonalne do numery stanu, czyli procesu rozpadu promieniotwórczego i procesu Yule'a.

Możemy skorzystać z sumowania jawnej postaci wyniku (3.3). Postąpimy inaczej, korzystając ze źródłowego równania (3.2)

$$\begin{aligned}
\langle m \rangle(t+1) &= \sum_{m=0}^{M} m p_m(t+1) \\
&= \sum_{m=0}^{M} \left(m - \frac{m^2}{N-2t} \right) p_m(t) + \sum_{m=0}^{M} \frac{m(m+1)}{N-2t} p_{m+1}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{M} \left(m - \frac{m^2}{N-2t} \right) p_m(t) + \sum_{m=0}^{M} \frac{(m+1)^2}{N-2t} p_{m+1}(t) - \sum_{m=0}^{M} \frac{m+1}{N-2t} p_{m+1}(t) \\
&= \langle m \rangle(t) - \frac{\langle m \rangle(t)}{N-2t} = \frac{N-2t-1}{N-2t} \langle m \rangle(t).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Czyli

$$\langle m\rangle(t) = \left(\prod_{k=0}^{t-1} \frac{N-2k-1}{N-2k}\right) M. \tag{3.7}$$

Przypominamy, że ten wynik jest prawdziwy póki gra na pewno się toczy, czyli gdy $N-2t-M \geqslant 0$. Ze względów praktycznych rozważamy gry, w których obie strony mają porównywalne szanse $w(C,M) \approx \frac{1}{2}$. Można spekulować, że wtedy jest małe prawdopodobieństwo, by mafia wygrała przed czasem, t.j. by po wybiciu miastowych pozostał więcej niż jeden członek mafii. Zatem równanie (3.7) powinno być wtedy dobrym przybliżeniem również gdy $N-2t-M<0$.

3.2. Ewolucja z czasem ciągłym

Zwykle w matematyce równania różniczkowe są prostsze od równań różnicowych do rozwiązania i późniejszej manipulacji. Postaram się przybliżyć dyskretne równanie ewolucji (3.2) przez r. różniczkowe.

$$p_m(t+1) - p_m(t) \xleftarrow[\Delta=1]{} \frac{p_m(t+\Delta)-p_m(t)}{\Delta} \xrightarrow[\Delta\to 0]{} \frac{d}{dt}p_m(t) \tag{3.8}$$

Możemy przybliżyć r. różnicowe przez r. różniczkowe, gdy względna zmiana jej pochodnej na przedziale $[t,t+1]$ jest niewielka. Gdy zastąpimy różnicę $p_m(t+1)-p_m(t)$ przez pochodną $\frac{d}{dt}\tilde{p}_m(t)$, z równania (3.2) otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_m(t) = -\frac{m}{N-2t}\tilde{p}_m(t) + \frac{m+1}{N-2t}\tilde{p}_{m+1}(t). \tag{3.9}$$

Intuicyjnie rzecz biorąc, ilekroć jest mała szansa, by w trakcie jednej doby zginął jeden członek mafii, równanie (3.9) powinno być dobrym przybliżeniem swej oryginalnej wersji. Niemniej, przynajmniej w tej pracy, nie zamierzam wdawać się w ścisłe matematyczne oszacowanie błędu.

Jeśli czyjaś matematyczna czystość została w tym miejscu urażona, chciałbym przypomnieć, że samo dyskretne równanie (3.2) bazuje na pewnych uproszczeniach rzeczywistej gry towarzyskiej. Tym samym proponuję matematycznym purystom, by przyjęli, że postuluję (3.9) jako alternatywny model gry w mafię.

Rozwiązaniem r. różniczkowego (3.9) jest

$$\tilde{p}_m(t) = \binom{M}{m}\left(1-\sqrt{1-\frac{2t}{N}}\right)^{M-m}\left(\sqrt{1-\frac{2t}{N}}\right)^{m}, \tag{3.10}$$

przy czym szczegółowe wyprowadzenie jest w Dodatku B. Łatwo sprawdzić, że funkcja $\tilde{p}_m(t)$ osiąga maksimum dla

$$t_m = \frac{N}{2}\left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^2\right), \tag{3.11}$$

co ułatwia nam jej jakościowe badanie.

Można pokusić się o oszacowanie szans zwycięstwa mafii w sposób analogiczny, jak w (3.4), czyli

$$\tilde{w}(c,m) = 1-\tilde{p}_0\left(\frac{c+m-1}{2}\right) = 1-\left(1-\sqrt{1-\frac{c+m-1}{c+m}}\right)^{m} \tag{3.12}$$

$$\approx \frac{m}{\sqrt{c+m}}. \tag{3.13}$$

W szczególności otrzymujemy warunek $m \propto \sqrt{n}$, gdy chcemy, by szanse wygrania obu frakcji były podobne $\tilde{w}(c,m) \approx \frac{1}{2}$. Oczywiście nie mamy ścisłego powiązania między $\tilde{w}(c,m)$ a $w(c,m)$. Zachęcony rozwiązaniem dla jednoosobowej mafii (2.6) oraz wynikami numerycznymi stawiam hipotezę, że

$$\lim_{c\to\infty} \frac{w(c,m)}{m/\sqrt{c+m}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{((c+m) \bmod 2)-1/2}. \tag{3.14}$$

Rozdział 4

Podsumowanie

W niniejszej pracy zaproponowałem pewien wariant gry w mafię, możliwie ją upraszczający. W ramach niego rozważyłem szanse wygrania mafii w funkcji liczby miastowych i liczby członków mafii. Zająłem się jego jakościową analizą, a także znalazłem ścisłe rozwiązanie. Następnie badałem dynamikę, śledząc prawdopodobieństwa, że do danej doby przeżyje określona liczba członków mafii. Ich ewolucja była procesem czystej śmierci, który rozwiązałem zarówno dla czasu dyskretnego, jak i ciągłego.

Uzyskane wyniki wykraczają poza dostępne w literaturze i mogą okazać się przydatne przy:

- Badaniach psychologicznych, wykorzystujących grę w mafię jako narzędzie do sprawdzania zjawiska ukrywania tożsamości i formowania oskarżeń w przypadku niepełnej informacji.
- Tworzeniu bardziej zaawansowanych matematycznych modeli gry w mafię, obejmujących specjalne postacie czy też aspekt psychologiczny.
- Opisie problemów o podobnej naturze, polegających na konkurencji małej, silnej grupy ze słabszą, ale znacznie liczniejszą.

Komentarz i podziękowania

Niniejsza praca znajduje się na stronie domowej autora [12]. Od złożonej formalnie pracy licencjackiej różni się istnieniem odnośników, zamianą wykresów na takie, które nie mulą komputera oraz redukcją błędów językowych. Chciałbym podziękować Aleksandrowi Kubicy za liczne poprawki mojej kiepskiej interpunkcji.

Dodatek A

Rozwiązanie r. różnicowego na $p_m(t)$ przy użyciu f. tworzącej

Chcemy rozwiązać równanie (3.2), t.j.

$$p_m(t+1) = \frac{(N-2t)-m}{N-2t} p_m(t) + \frac{m+1}{N-2t} p_{m+1}(t)$$

z warunkiem początkowym $p_m(0) = \delta_{mM}$. Wprowadźmy funkcję tworzącą [11]

$$F(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t) z^m, \tag{A.1}$$

pamiętając że warunek początkowy to $F(0,z) = z^M$. Mnożąc (3.2) stronami przez z^m i wykonując sumowanie otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(t+1,z) &= F(t,z) - \frac{z}{N-2t}\frac{\partial F(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{N-2t}\frac{\partial F(t,z)}{\partial z} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{z-1}{N-2t}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\mathbf{B}(t)} F(t,z). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Innymi słowy, działanie operatorem liniowym $\mathbf{B}(t)$ daje funkcję tworzącą dla kolejnej doby. Postać operatora liniowego $\mathbf{B}(t)$ jest o tyle szczęśliwa, że dla każdego t ma on ten sam zbiór wektorów własnych, $(z-1)^k$ z odpowiadającymi im wartościami własnymi $(1 - k/(N-2t))$. Teraz wystarczy rozłożyć bazę jednomianów w bazie własnej operatora i przezeń przepuścić

$$\begin{aligned} F(t,z) &= \mathbf{B}(t-1)\mathbf{B}(t-2)\cdots\mathbf{B}(0)z^M \\ &= \sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}\mathbf{B}(t-1)\mathbf{B}(t-2)\cdots\mathbf{B}(0)(z-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}(z-1)^k\left(1-\frac{k}{N-2(t-1)}\right)\left(1-\frac{k}{N-2(t-2)}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}(z-1)^k\frac{(N-2t)!!}{N!!}\frac{(N-k)!!}{(N-2t-k)!!}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Korzystając raz jeszcze ze wzoru dwumianowego Newtona, przyrównując rozwiązanie (A.3) do definicji f. tworzącej (A.1) otrzymujemy

$$p_m(t) = \sum_{k=m}^{M} \binom{M}{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \frac{(N-2t)!!}{N!!} \frac{(N-k)!!}{(N-2t-k)!!},$$

czyli (3.3).

Dodatek B

Rozwiązanie r. różniczkowego na $\tilde{p}_m(t)$ przy użyciu f. tworzącej

Mamy zamiar rozwiązać równanie różniczkowe (3.9)

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_m(t) = -\frac{m}{N-2t}\tilde{p}_m(t) + \frac{m+1}{N-2t}\tilde{p}_{m+1}(t),$$

z warunkiem początkowym $\tilde{p}(0) = \delta_{mM}$. Kolejny raz posłużymy się funkcją tworzącą [11]

$$G(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}_m(t) z^m, \tag{B.1}$$

znów z warunkiem początkowym $G(0,z) = z^M$. Otrzymujemy równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t} = \frac{(-z+1)}{N-2t}\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}, \tag{B.2}$$

które rozwiążemy metodą charakterystyk. Niech poziomicami $G(t,z)$ będą $(t(\varphi), z(\varphi))$, czyli zachodzi związek

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}\frac{dt}{d\varphi} + \frac{\partial G(t,z)}{\partial z}\frac{dz}{d\varphi} = 0. \tag{B.3}$$

Porównując (B.2) z (B.3) otrzymujemy w szczególności

$$\frac{dt}{N-2t} = d\varphi = \frac{dz}{z-1}, \tag{B.4}$$

czyli

$$\begin{aligned} G(t,z) &= f\left(\frac{1}{2}\ln|N-2t| + \ln|1-z|\right) \\ &= f\left(\ln\left|\sqrt{N-2t}(1-z)\right|\right). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Musimy dobrać taką funkcję $f(x)$, by uczynić zadość warunkowi początkowemu. Nietrudno dojść do jawnej postaci f. tworzącej

$$G(t,z) = \left(1 - \frac{2t}{N}(1-z)\right)^M, \tag{B.6}$$

której porównanie do (B.1) daje poszukiwane rozwiązanie (3.10)

$$\tilde{p}_m(t) = \binom{M}{m}\left(1 - \sqrt{1-\frac{2t}{N}}\right)^{M-m}\left(\sqrt{1-\frac{2t}{N}}\right)^m.$$

Bibliografia

[1] *The Graduate Mafia Brotherhood of Princeton University*, http://www.princeton.edu/~mafia/ (dostęp 2009-09-09).

[2] *The Original Mafia — Dimitry Davidoff's original rules*, http://www.maximumawesome.com/articles/mafiaoriginal.htm (dostęp 2009-09-09).

[3] Wikipedia contributors, *"Mafia (party game)", Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mafia_(party_game)&oldid=289096442 (dostęp 2009-05-11).

[4] *Oficjalna strona Ktulu*, http://21wdw.staszic.waw.pl/ktulu/ (dostęp 2009-09-09).

[5] H.W. de Haan, W.H. Hesselink, G.R.R. de Lavalette, *An abstract multi-agent framework applied to a social interaction game*, http://www.ai.rug.nl/conf/bnaic2004/ap/a47new.pdf (dostęp 2009-09-09).

[6] M. Braverman, O. Etesami, E. Mossel, *Mafia: A Theoretical Study Of Players and Coalitions in a Partial Information Environment*, Annals of Applied Probability, 18, 825-846 (2008), http://arxiv.org/abs/math/0609534v4.

[7] E. Yao, *A Theoretical Study of Mafia Games*, http://arxiv.org/abs/0804.0071 (2008).

[8] G. Owen, *Teoria gier*, PWN, Warszawa 1975, ss 92-95.

[9] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 2*, PWN, Warszawa 2004, s. 125.

[10] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, Tom I*, PWN, Warszawa 1987, ss 388-408.

[11] H.S. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press Inc., 1994, http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html.

[12] *Piotr Migdał - strona domowa: Nauka*, http://migdal.wikidot.com/nauka/ (dostęp 2009-10-13).